

УДК 69.05

## МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ УСИЛИЙ В ИЗГИБАЕМЫХ ПЛАСТИНАХ

**В.В. Лалин, Р.М. Шакирова, А.А. Лебедева**

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
г. Санкт-Петербург (Российская Федерация)*

**Аннотация.** В строительной механике изучается множество вопросов по регулированию напряженного состояния конструкций различными методами. Одним из таких методов оптимального управления напряженно-деформированного состояния конструкции является минимизация напряжений (усилий) в элементах конструкций. В данной работе предлагается метод минимизации усилий при изгибе пластин за счет использования дополнительных нагрузок, приложенных на определенных участках контура пластины. Таким образом достигается экономический эффект за счет уменьшения толщины плиты и как следствие снижения материалоемкости конструкции. Главная трудность решения задачи зависит от выбора целевой функции. В данной работе предлагается использовать энергию деформации как целевую функцию для решения задачи оптимизации. Этот метод позволил получить относительно простой алгоритм решения оптимизационной задачи, так как целевая функция (энергия деформации) использована в вариационной постановке задачи изгиба пластины. Основным преимуществом разработанного алгоритма является то, что он может быть реализован с использованием существующих программных комплексов без необходимости использования математического программирования. В статье доказано, что решение, полученное с помощью предложенного алгоритма, минимально в энергетической норме, связанной с энергией деформации. Приведен пример решения задачи с использованием разработанного алгоритма.

**Ключевые слова:** оптимальное проектирование, энергия деформации, целевая функция, энергетическая норма, краевая нагрузка, стержневая система, изогнутая пластина, напряженное состояние.

**Ссылка для цитирования:** Лалин В.В., Шакирова Р.М., Лебедева А.А. Метод минимизации усилий в изгибаемых пластинах // Инженерные исследования. 2023. №5 (15). С. 3-11. EDN: DKKWBV

## METHOD FOR MINIMIZING FORCES IN BENDING PLATES

**V.V. Lalin, R.M. Shakirova, A.A. Lebedeva**

*Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, St.Petersburg (Russian Federation)*

**Abstract.** In structural mechanics, many issues are studied on regulating the stressed state of structures using various methods. One of such methods for optimal control of the stress-strain state of a structure is to minimize stresses (forces) in structural elements. This paper proposes a method for minimizing the forces when bending plates by using additional loads applied in certain areas of the plate contour. In this way, an economic effect is achieved by reducing the thickness of the slab and, as a result, reducing the material consumption of the structure. The main difficulty in solving the problem depends on the choice of the objective function. This paper proposes to use strain energy as an objective function to solve the optimization problem. This method made it possible to obtain a relatively simple algorithm for solving the optimization problem, since the objective function (strain energy) was used in the variational formulation of the plate bending problem. The main advantage of the developed algorithm is that it can be implemented using existing software systems without the need for mathematical programming. The article proves that the solution obtained using the proposed algorithm is minimal in the energy norm associated with the deformation energy. An example of solving a problem using the developed algorithm is given.

**Keywords:** optimal design, strain energy, energy norm, control action, rods system, bending plate, stress-strain state.

**For citation:** Lalin V.V., Shakirova R.M., Lebedeva A.A. Method for minimizing forces in bending plates // Inzhenernyye issledovaniya [Engineering Research]. 2023. No.5 (15). Pp. 3-11. EDN: DKKWBV

## ВВЕДЕНИЕ

Вопрос оптимального проектирования конструкций исследуется с давних времен и получил особое внимание в 70-80-х годах прошлого века [1–5]. С тех пор эта область остается актуальной областью строительной науки, о чем свидетельствует большой объем научно-технических публикаций на эту тему [6, 7]. Актуальность задач объясняется тем, что проектирование конструкций методами оптимизации снижает их материалоемкость (экономический эффект).

Одной из актуальных задач оптимизации конструкций являются задачи получения конструкций минимального веса (минимальной материалоемкости) [8–12] и тесно связанные с ними задачи получения наименее напряженных конструкций, т. е. задачи достижения минимально возможного уровня напряжений (усилий) в сооружении при заданной внешней нагрузке [1, 5, 7]. Последние задачи являются частью широкой области управления напряженно-деформированным состоянием строительных конструкций [13, 14].

Уменьшая напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкции, можно добиться уменьшения толщин и сечений конструкции и как следствие уменьшение общего веса конструкции.

Одним из способов регулирования НДС сооружений является использование дополнительных нагрузок, прикладываемых к отдельным частям конструкции [13, 14, 17, 18]. Таким образом, задача сводится к поиску такой оптимальной нагрузки, которая обеспечит минимизацию НДС конструкции.

Основная трудность решения задач оптимизации является поиск целевой функции. Целевая функция – это такая функция, которую нужно минимизировать за счет выбора управляющих воздействий. Как правило, в задачах оптимизации целевую функцию принимают в виде среднеквадратичного отклонения решения от оптимального [1, 5, 7]. Эта функция не требует математической постановки задачи и при решении необходимо воспользоваться методом математического программирования.

В настоящей работе применительно к изгибаемым пластинам предлагается использовать целевую функцию в виде энергетической нормы [14]. Наименее напряженным состоянием пластины считается состояние, в котором энергетическая норма является минимальной. Такая целевая функция напрямую связана с вариационной постановкой исходной задачи, что упрощает алгоритм решения задачи оптимизации. При этом решение задачи оптимизации может быть получено на любом существующем программном комплексе по расчету конструкций.

## МЕТОДЫ

### Постановка задачи.

Рассмотрим поставленную задачу на примере упругой системы (пластины), занимающей плоскую область  $\Omega$ , ограниченную контуром  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , где  $\Gamma_1$  – защемленная часть контура,  $\Gamma_2$  – свободная часть контура, на которой предполагается возможность задания краевых нагрузок:  $p$  – распределенных вертикальных сил и  $m$  – распределенного изгибающего момента. Любая из указанных краевых нагрузок может быть принята равной нулю.

Материал, из которого состоит пластина, будем считать линейно-упругим, однородным и изотропным с характеристиками:  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Толщина  $h$  пластины – постоянна.

Задача изгиба пластины описывается следующими дифференциальным уравнением и граничными условиями:

$$\begin{cases} \Omega : D\Delta u = q \\ \Gamma_1 : u = 0; \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \\ \Gamma_2 : M_m = m; Q_n - \frac{\partial M_m}{\partial \Gamma} = p \end{cases} \quad (1)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластины,  $u(x, y)$  – прогиб пластины,  $q$  –

распределенная нагрузка,  $\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$  – бигармонический оператор,

$\frac{\partial}{\partial n} = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y}$  – производная по нормали к контуру пластины,

$n^T = (n_x \quad n_y)$  – вектор единичной внешней нормали к контуру пластины,

$n_x, n_y$  – проекции вектора  $n$  на оси координат,

$M_{mn} = n_x n_y (M_x - M_y) + (n_y^2 - n_x^2) M_{xy}$  – крутящий момент на контуре пластины,

$M_{nt} = n_x^2 M_x + 2n_x n_y M_{xy} + n_y^2 M_y$  – изгибающий момент на контуре пластины,

$Q_n = n_x Q_x + n_y Q_y$  – перерезывающая сила на контуре пластины,

$\frac{\partial}{\partial \Gamma} = n_x \frac{\partial}{\partial y} - n_y \frac{\partial}{\partial x}$  – производная по дуге контура  $\Gamma$ .

Напряженное состояние пластины характеризуется пятью силовыми величинами: изгибающими моментами  $M_x, M_y$ , крутящим моментом  $M_{xy}$ , перерезывающими силами  $Q_x, Q_y$ . Эти величины выражаются через прогиб следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \\ Q_x &= -D \frac{\partial(\Delta u)}{\partial x}, \\ Q_y &= -D \frac{\partial(\Delta u)}{\partial y}, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа на плоскости.

С учетом формул (2) граничные условия на части контура  $\Gamma_2$ , выраженные через функцию  $u$  имеют вид:

$$\Gamma_2 : \begin{cases} -D \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \nu \Delta u \right] = m \\ -D \left[ \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} - (1-\nu) \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \Gamma} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \Gamma} \right) \right] = p \end{cases} \tag{3}$$

где  $R$  – радиус кривизны контура пластины.

Введем энергетическое скалярное произведение:

$$[u, v] = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] d\Omega \quad (4)$$

и энергетическую норму:

$$\|u\| = [u, u]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Отметим, что выражение (4) симметрично относительно  $u, v$ , т. е.  $[u, v] = [v, u]$ , как и должно быть для скалярного произведения.

Запишем постановку задачи (1) в операторной форме:

$$\begin{cases} \Omega : Au = q \\ \Gamma_1 : Cu = 0 \\ \Gamma_2 : Bu = f \end{cases} \quad (6)$$

где  $Au = D\Delta\Delta u$ ,

$Cu = \begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial n} \end{pmatrix}$  – оператор кинематических граничных условий,

$Bu = \begin{pmatrix} -D \left[ \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} - (1-\nu) \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \Gamma} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \Gamma} \right) \right] \\ -D \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \nu \Delta u \right] \end{pmatrix}$  – оператор статических граничных условий,

$f = \begin{pmatrix} p \\ m \end{pmatrix}$  – столбец краевых нагрузок.

Как известно, решение задачи (6) единственно, или, что равносильно, однородная задача (6) (при  $q = 0, f = 0$ ) имеет только нулевое решение.

При постановке задачи оптимизации распределенную нагрузку  $q$  будем считать заданной, а столбец краевых нагрузок  $f$  будет являться управляющим воздействием.

С помощью введенных операторных обозначений, интегрируя по частям, можно получить следующее равенство:

$$[w_1, w_2] = \int_{\Omega} w_1 A w_2 d\Omega - \int_{\Gamma} \langle C w_1, B w_2 \rangle d\Gamma \quad (7)$$

где использовано обозначение покомпонентного (скалярного) произведения столбцов  $h$  и  $g$ :

$$\langle h, g \rangle = h_1 g_1 + h_2 g_2 \quad (8)$$

Целевую функцию для задачи минимизации НДС выберем в виде [27]:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} [u, u] \quad (9)$$

то есть наименее напряженным состоянием пластины будем считать состояние, в котором энергия деформации (9) является минимальной.

Таким образом, предлагается следующая постановка задачи оптимизации:

Найти  $f$  (нагрузку на части контура  $\Gamma_2$ ) такую, чтобы решение задачи (6) при фиксированной нагрузке  $q$  минимизировало функционал (9).

### Метод решения.

Сформулированную задачу будем рассматривать, как задачу условной минимизации функционала (9) при дополнительных условиях (6). С помощью метода неопределенных множителей Лагранжа перейдем к задаче безусловной минимизации функционала  $G$

$$G(u, f, \mu, \mu_1, \mu_2) = \Pi(u) + \int_{\Omega} \mu(Au - q) d\Omega + \int_{\Gamma_1} \langle \mu_1, Cu \rangle d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \langle \mu_2, Bu - f \rangle d\Gamma \quad (10)$$

где  $\mu, \mu_1, \mu_2$  – множители Лагранжа.

Вычислив вариацию функционала  $G$ , получим:

$$\begin{aligned} \delta G = & \int_{\Omega} [\delta\mu(Au - q) + \delta u A(u + \mu)] d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_1} [\langle \delta\mu_1, Cu \rangle + \langle C\delta u, \mu_1 + B(u + \mu) \rangle - \langle B\delta u, C\mu \rangle] d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_2} [\langle \delta\mu_2, Bu - f \rangle - \langle \mu_2, \delta f \rangle + \langle C\delta u, B(u + \mu) \rangle - \langle B\delta u, \mu_2 + C\mu \rangle] d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

Условие стационарности функционала  $G: \delta G = 0$  приводит к следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\Omega: Au = q \quad A(u + \mu) = 0 \quad (12)$$

$$\Gamma_1: Cu = 0 \quad \mu_1 + B(u + \mu) = 0 \quad C\mu = 0 \quad (13)$$

$$\Gamma_2: Bu = f \quad \mu_2 = 0 \quad B(u + \mu) = 0 \quad \mu_2 + C\mu = 0 \quad (14)$$

Из (13) следует, что на  $\Gamma_1: C(u + \mu) = 0$ , следовательно, сумма  $u + \mu$  удовлетворяет следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \Omega: A(u + \mu) &= 0 \\ \Gamma_1: C(u + \mu) &= 0 \\ \Gamma_2: B(u + \mu) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Задача (15) есть однородная задача (6), которая, как отмечалось, имеет только нулевое решение:  $u + \mu \equiv 0$ .

Тогда из (14) следует:  $0 = \mu_2 = -C\mu = Cu$  на  $\Gamma_2$ .

Таким образом, получаем, что функцию  $u$  можно найти из следующей задачи:

$$\begin{aligned} \Omega: Au &= q \\ \Gamma_1: Cu &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

После решения задачи (17) искомую краевую нагрузку  $f$  можно найти из равенства:

$$\Gamma_2: f = Bu \quad (18)$$

В итоге можно сформулировать следующий алгоритм нахождения наименее напряженного состояния пластины при помощи дополнительных краевых нагрузок:

1. На части контура пластины, на которые можно прикладывать нагрузки, ставим связи по направлению искомых нагрузок.
2. Полученную систему нагружаем заданными нагрузками и решаем задачу.
3. Реакции во введенных связях и есть искомая краевая нагрузка.

Изложенный алгоритм может быть реализован на любом программном комплексе по расчету строительных конструкций и не требует использования дополнительных программных модулей, реализующих методы математического программирования.

Докажем, что решение, получаемое в п. 2 алгоритма, и есть оптимальное решение, то есть это решение имеет минимальную энергетическую норму.

Определим:

1. Линейное пространство  $\Pi_1$  функций  $w$ , как множество функций, удовлетворяющих условиям:

$$\Pi_1 : \begin{cases} \Omega : Aw = 0 \\ \Gamma_1 : Cw = 0 \\ \Gamma_2 : Bw = f \end{cases} \quad (19)$$

где краевая нагрузка  $f$  может быть произвольной.

2. Линейное многообразие  $\Pi_2$ , как сдвиг пространства  $\Pi_1$ , заданный функцией  $q$ , т. е. множество функций, удовлетворяющих условиям:

$$\Pi_2 : \begin{cases} \Omega : Aw = q \\ \Gamma_1 : Cw = 0 \\ \Gamma_2 : Bw = f \end{cases} \quad (20)$$

В условиях (20) краевая нагрузка  $f$  может быть произвольной, а нагрузка  $q$  является фиксированной. В дальнейшем доказательстве считается, что функция  $f$  в (19) и (20) является одной и той же.

Из (17) следует, что предлагаемое решение (обозначим его  $u_0$ ) принадлежит многообразию  $\Pi_2$ . Функция  $u_0$  будет искомым оптимальным решением, если она обладает минимальной энергетической нормой:

$$\|u_0\| = \min \|w\|, \quad (21)$$

для любой функции  $w \in \Pi_2$ .

Докажем, что функция  $u_0$ , определенная из задачи (17), ортогональна в энергетической метрике пространству  $\Pi_1$ , то есть удовлетворяет равенству:

$$[u_0, w] = 0, \quad (22)$$

для любой функции  $w \in \Pi_1$ .

Пусть  $u_0$  – решение задачи (17),  $w$  – любая функция, принадлежащая пространству  $\Pi_1$ . Положим в равенстве (7)  $w_1 = u_0$ ,  $w_2 = w$ . Тогда учитывая (17) и (19), получим (22). Условие (22) означает, что функция  $u_0$  есть «кратчайшее расстояние» в энергетической норме от  $\Pi_2$  до  $\Pi_1$ , то есть она имеет наименьшую форму.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве примера приведем решение задачи.

Рассматривается шарнирно-опертая квадратная плита с пролетом  $l = 6$  м, и консолями длиной 1 м с двух сторон плиты (рис. 1). Плита загружена равномерно-распределенной нагрузкой  $q = 500$  кН/м<sup>2</sup>. Толщина плиты – 20 см, модуль упругости материала – 9000 МПа, коэффициент Пуассона – 0,2. Расчеты проводились с использованием программного комплекса «ЛИРА САПР 2020».

Расчетная схема показана на рис. 1. Исходное напряженное состояние системы представлено на рис. 2.

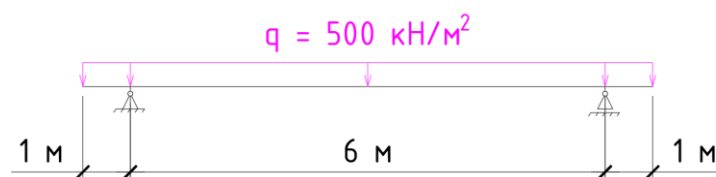
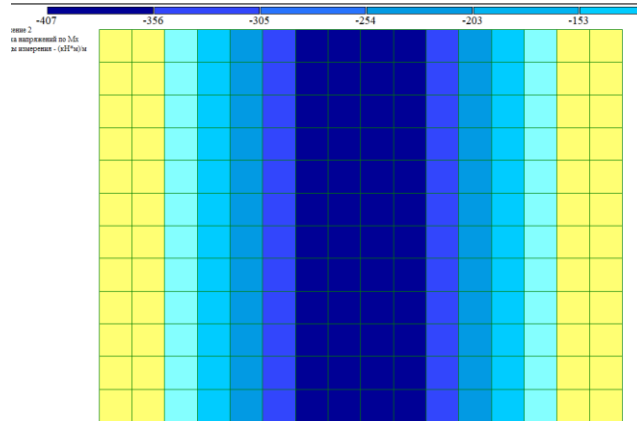
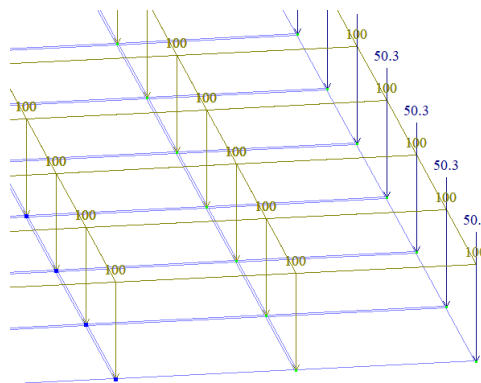


Рис. 1. Расчетная схема плиты  
 Fig. 1. Design scheme of the plate

Задача: требуется подобрать такую дополнительную распределенную по линии вертикальную нагрузку на концах консолей, чтобы минимизировать энергию деформации системы. Согласно предложенному алгоритму решения задачи необходимо: поставить шарнирные опоры вдоль концов консолей, приложить ту же нагрузку  $q$  и найти реакции в поставленных опорах. Полученные реакции и есть искомая величина оптимальной нагрузки (рис. 3).

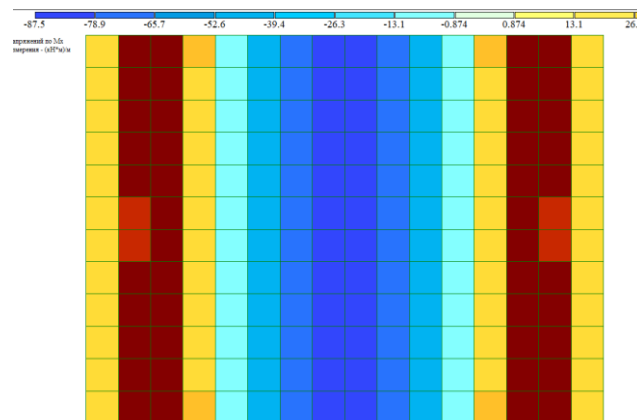


**Рис. 2.** Изополя моментов исходной схемы, максимальное значение момента в центре – 407 кНм/м  
**Fig. 2.** Isofield of moments of the initial scheme, the maximum value of the moment in the center is 407 kNm/m



**Рис. 3.** Нагрузка на консоль (оптимальная)  
**Fig. 3.** Console load (optimal)

Оптимальное решение получим, приложив в исходной расчетной схеме заданную равномерно-распределенную нагрузку  $q$  и полученную нагрузку на концах консолей. Оптимальное решение приведено на рис. 4.



**Рис. 4.** Оптимальное решение, максимальное значение момента в центре – 87,5 кНм/м  
**Fig. 4.** The optimal solution, the maximum value of the moment in the center is 87.5 kNm/m

Необходимо отметить, что произошло уменьшение максимального значения изгибающего момента в данной плите, который в исходной схеме составлял  $M_1 = 407$  кНм, а в оптимальной –  $M_2 = 87,5$  кНм.

Уменьшение изгибающего момента в пролете составило  $\frac{407 - 87,5}{407} \cdot 100\% = 78,5\%$ .

#### ОБСУЖДЕНИЕ

Приведенный пример показывает, что разработанный алгоритм решения оптимизационной задачи, основанный на минимизации энергии деформации, не требует использования специализированных методов математического программирования, которые обычно используются при оптимальном проектировании изгибаемых пластин [3,4], и может быть реализован на любом существующем программном комплексе по расчету строительных конструкций. Пример решения с стержневой системой рассмотрен в [18].

При практическом применении полученных результатов в качестве управляющих оптимальных нагрузок могут быть использованы как специальные дополнительные грузы, так и собственный вес вышележащих стен и перекрытий верхних этажей сооружения. Это может дать экономический эффект за счет увеличения полезной площади при незначительном увеличении стоимости конструкции.

Как показывают приведенные примеры решения задач, минимизация общей энергии деформации позволяет также значительно снизить максимальные значения изгибающих моментов в конструкции. Понижение уровня НДС плиты может позволить достичь экономического эффекта за счет уменьшения толщины плиты и снижения материалоемкости конструкции [8].

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты настоящей работы заключаются в следующем:

1. Сформулирована вариационная постановка задачи о достижении наименее напряженного состояния изгибаемой пластины, основанная на выборе энергии деформации пластины в качестве целевой функции.
2. В предложенной постановке управляющими воздействиями являются дополнительные распределенные по линиям нагрузки (распределенные силы и моменты).
3. Разработан алгоритм нахождения оптимальных дополнительных нагрузок и оптимального (наименее напряженного) состояния изгибаемой пластины. Отличительной особенностью алгоритма является то, что он может быть реализован на любом существующем программном комплексе по расчету строительных конструкций.
4. Приведено доказательство оптимальности решения, получаемого с помощью разработанного алгоритма.
5. Приведен пример решения задачи, который показывает, что оптимальное решение, минимизирующее энергию деформации пластины, одновременно является решением с минимальными изгибающими моментами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prager W. Introduction to Structural Optimization // Springer. 1974. 110 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-2644-8
2. Rozvany G., Masur E. Optimal Design of Flexural Systems // Pergamon Press Ltd. 1976. 316 p. DOI:10.1115/1.3424124
3. Prasad B., Haftka R. Optimal Structural Design with Plate Finite Elements // Journal of the Structural Division. 1979. 105(ST11). Pp. 2367-2382. DOI: 10.1061/JSDEAG.0005282
4. Cheng K.-T., Olhoff N. An Investigation Concerning Optimal Design of Solid Elastic Plates // Pergamon Press, Preprint. 1980. 36 p. DOI: 10.1016/0020-7683(81)90065-2
5. Komkov V. Variational principles of continuum mechanics with engineering applications. V.2. Introduction to optimal design theory. // Kluwer Academic Publishers. 1988. 276 p.
6. Tamrazyan A.G., Alekseytsev A.V. Review of modern optimization methods for bearing systems of buildings and structures // Vestnik MGSU. 2020. 15(1). Pp. 12-30.
7. Lyakhovich L.S., Perelmuter A.V. Some problems of building constructions optimal projection // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2014. 10(2). Pp. 14-23.
8. Rees D.W.A. Mechanics of Optimal Structural Design: Minimum Weight Structures // John Wiley & Sons. 2009. 560 p. DOI: 10.1002/9780470749784
9. Kaveh A., Boland Gerami A. Optimal design of large-scale space steel frames using cascade enhanced colliding body optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2017. 55(1). Pp. 237-256. DOI: 10.1007/s00158-016-1494-2



10. Artar M., Daloğlu A.T. Optimum weight design of steel space frames with semi-rigid connections using harmony search and genetic algorithms // *Neural Computing and Applications*. 2018. 29(11). Pp. 1089-1100. DOI: 10.12989/sem.2015.55.2.299
11. Ho-Huu V., Vo-Duy T., Duong-Gia D., Nguyen-Thoi T. An efficient procedure for lightweight optimal design of composite laminated beams // *Steel and Composite Structures*. 2018. 27(3). Pp. 297-310. DOI: 10.12989/scs.2018.27.3.297
12. Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. Criterion of minimum material consumption of flange of i-shaped bar with a variation in its thickness and outline of the width, with restriction to the value of the critical force or restriction to the value of the first natural frequency in two principal planes of inertia of the section // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018. 14(2). Pp. 96-108. DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-96-108
13. Перельмутер А.В. Управление поведением несущих конструкций // Изд. 2-е, доп. и испр. - Москва : Изд-во АСВ, 2011. 183 с.
14. Lalin V., Savchenko A., Dyakov S., Lalina I. The optimal control of the elastic stress state using boundary loads // *Applied Mechanics and Materials*. 2015. Pp. 836-841. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.725-726.836
15. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике // М.: Наука. 1970. 512 с.
16. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными // М.: Мир, 1972. 414с.
17. Ghasemof A., Mirtaheri M., Karami Mohammadi R. A new swift algorithm for bi-objective optimum design of steel moment frames // *Journal of Building Engineering*. 2021. № 39 (5). С. 1-18 DOI:10.1016/J.JOBE.2021.102162
18. Лалин В. В., Лалина И. И., Головченко Ю. Ю., Шакирова Р. М., Лебедева А. А. Метод минимизации усилий в стержневых системах с помощью узловых нагрузок // *Вестник евразийской науки*. 2022. Т. 14. No 2.

#### ОБ АВТОРАХ

**Владимир Владимирович Лалин** – доктор технических наук, профессор Высшей школы промышленного и гражданского строительства ИСИ. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ). 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29. E-mail: vllalin@yandex.ru

**Рената Маратовна Шакирова** – студент магистратуры. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ). 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29. E-mail: renshaxxx99@gmail.com

**Анна Александровна Лебедева** – магистр. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ). 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29. E-mail: anyaleb99@gmail.com

#### ABOUT THE AUTHORS

**Vladimir V. Lalin** – Doctor of Technical Sciences, Professor of the Higher School of Industrial and Civil Engineering, Institute of Civil Engineering. Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (SPbPU). 195251, Russia, St.Petersburg, Polytechnicheskaya st., 29. E-mail: vllalin@yandex.ru

**Renata M. Shakirova** – graduate student. Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (SPbPU). 195251, Russia, St.Petersburg, Polytechnicheskaya st., 29. E-mail: renshaxxx99@gmail.com

**Anna A. Lebedeva** – Master's degree. Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (SPbPU). 195251, Russia, St.Petersburg, Polytechnicheskaya st., 29. E-mail: anyaleb99@gmail.com