УДК 624.04, 531.01

О КЛАССИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

В.В. Лалин[1,2], И.И. Лалина[1], Е.В. Зданчук[1], К.К. Никоноров[1]
[1,] *Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург (Российская Федерация)*
[2]*Российский университет дружбы народов, г. Москва (Российская Федерация)*

Аннотация. Приводятся некоторые нерешенные задачи и парадоксы строительной механики и механики сплошных сред. Предлагается классификация математических моделей строительной механики на основе возможных отклонений от закона движения абсолютно твердого тела и наличия или отсутствия моментных напряжений. Дается описание четырех классов моделей для трехмерных и одномерных элементов конструкций и сплошных сред. Указываются новые, неисследованные модели и возможные пути решения приведенных задач с помощью новых моделей. Дается определение классической сплошной среды. Приводится теорема, названная «основной теоремой кинематики классических сплошных сред». Эта теорема накладывает ограничения на возможные движения классической сплошной среды. Описываются следствия из теоремы, важные, например, для построения геометрически нелинейной теории пластичности. Одним из таких следствий является недопустимость движения по закону простого сдвига для классической сплошной среды.

Ключевые слова: строительная механика, сплошные среды, классификация математических моделей, стержни, теория упругости, теория пластичности, среда Коссера.

Ссылка для цитирования: Лалин В.В., Лалина И.И., Зданчук Е.В., Никоноров К.К. О классификации математических моделей строительной механики // Инженерные исследования. 2024. №3(18). С. 3-11. EDN: EDVFII

ON THE CLASSIFICATION OF MATHEMATICAL MODELS OF STRUCTURAL MECHANICS

V.V. Lalin[1,2], I.I. Lalina[1], E.V. Zdanchuk[1], K.K. Nikonorov[1]
[1]*Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, St.Petersburg (Russian Federation)*
[2]*Peoples' Friendship University of Russia, Moscow (Russian Federation)*

Abstract. Some unsolved problems and paradoxes of structural mechanics and continuum mechanics are presented. The classification of mathematical models of structural and continuum mechanics based on possible deviations from the law of motion of an absolutely rigid body and the presence or absence of moment stresses is proposed. Four classes of models for three-dimensional and one-dimensional structural elements and continuous media are described. New, unexplored models and possible ways to solve the above problems using new models are indicated. The definition of a classical continuous medium is given. A theorem called the "basic theorem of the kinematics of classical continuous media" is presented. This theorem imposes restrictions on the possible movements of a classical continuous medium. The consequences of it are described, which are important, for example, for the development of a geometrically nonlinear theory of plasticity. One of these consequences is the inadmissibility of motion according to the law of simple shear for a classical continuous medium.

Keywords: structural mechanics, continuous media, classification of mathematical models, rods, elasticity theory, plasticity theory, Cosserat medium.

For citation: Lalin V.V., Lalina I.I., Zdanchuk E.V., Nikonorov K.K. On the classification of mathematical models of structural mechanics // Inzhenernyye issledovaniya [Engineering Research]. 2024. No.3(18). Pp. 3-11. EDN: EDVFII

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на бурное развитие новых областей исследования, постановку и решение новых сложных задач, все еще остаются без ответа некоторые вопросы и оказываются нерешенными отдельные задачи строительной механики конструкций и сплошных сред, на которые хотели бы обратить внимание авторы.

Приведем несколько примеров.

1.Представим себе, что человек держит в руках один конец свободно свисающей (т. е. натянутой только собственным весом) веревки, закрепленной на другом конце. Если резко дернуть свободный конец веревки «вверх – вниз», то по веревке пойдет от свободного к закрепленному концу волна в виде уединенного «горба». Трудно представить себе человека, который не проделывал этот «опыт» самостоятельно, или, хотя бы, не видел его в исполнении других людей.

Не менее трудно осознать, что указанное явление до сих пор не имеет математического описания. Это тем более странно, что статическая задача о провисе веревки (нити) под действием собственного веса является одной из первых решенных задач механики и была правильно решена Я. Бернулли в конце XVII века [1].

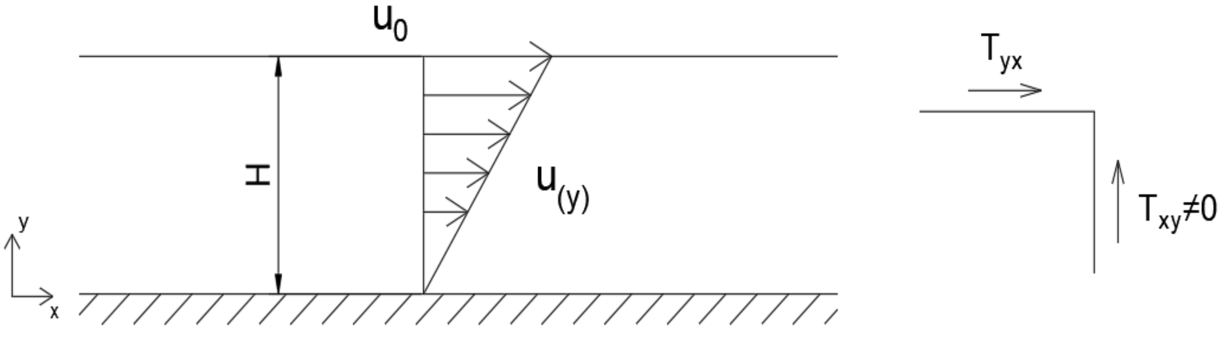
Если есть правильные статические уравнения, то переход к динамическим уравнениям в этой задаче не составляет труда – достаточно «добавить силы инерции». И, тем не менее, указанная динамическая задача за 300 лет развития механики и математики так и не была решена (точнее, ни одно из полученных решений не описывает распространения по гибкой нити (веревке) волны в виде уединенного «горба»).

2. Изложение гидродинамики вязкой жидкости начинается с постулирования закона Ньютона для касательного напряжения [2]:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{1}$$

где μ – коэффициент вязкости, u – скорость жидкости вдоль оси x, касательное напряжение τ_{yx} действует на площадках, параллельных оси x.

Этот закон логичен и не противоречит здравому смыслу: если градиент горизонтальной скорости u в вертикальном (перпендикулярном к течению) направлении отличен от нуля – одни слои жидкости «опережают» другие, то возникают горизонтально направленные силы трения - вязкие напряжения τ_{yx}. Однако, выполнение второго закона динамики Эйлера требует симметричности тензора вязких напряжений, в результате обязаны появляться касательные напряжения τ_{xy} на площадках, параллельных оси y. Это может приводить к парадоксальным ситуациям.



а) б)

Рис. 1. Плоско-параллельное течение вязкой жидкости: а - схема течения; б - касательные напряжения.

Fig. 1. Plane-parallel flow of a viscous fluid: a- flow diagram; b - shear stresses.

Рассмотрим задачу о безнапорном плоскопараллельном течении вязкой жидкости в канале с горизонтальными стенками (рис. 1*а*).

Нижняя стенка ($y = 0$) – неподвижна, верхняя движется вправо с постоянной скоростью u_0. Профиль скорости точного решения этой задачи $u_0(y) = u_0\, y / H$, где H – глубина канала, изображен на рис. 1*а*. Вышележащие слои жидкости опережают нижележащие и согласно приведенному закону Ньютона на горизонтальных площадках возникают касательные напряжения τ_{yx}.

Согласно классической теории вязкой жидкости одновременно появляются касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ на вертикальных площадках (рис. 1*б*), но это противоречит закону Ньютона! Согласно этому закону,

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial \nu}{\partial x}, \tag{2}$$

где $\nu -$ скорость жидкости по оси y. В рассматриваемой задаче не только равен нулю градиент вертикальной скорости

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

но и сама эта скорость равна нулю $\nu = 0$.

Получается, что постулировав закон Ньютона, мы тут же его нарушаем. В большинстве работ по гидродинамике этот парадокс предпочитают не замечать. В немногочисленных работах, где эта ситуация обсуждается (см., например, [3]), логичного способа разрешения парадокса, на взгляд авторов, не предложено.

3. В нелинейной динамической теории газов и жидкостей доказана локальная теорема единственности решения задачи Коши [4-6]: если в момент времени t задано распределение скоростей и напряжений, то можно найти промежуток времени Δt, в течение которого решение уравнений (если оно существует) единственно. Однако, для твердого деформируемого тела, даже в случае простейшей упругой модели, подобная теорема единственности для нелинейной динамической задачи не доказана.

По мнению авторов указанная локальная теорема единственности решения задачи Коши является свидетельством корректности математической постановки. Отсутствие доказательства такой теоремы в нелинейной динамической теории упругости – показатель неблагополучия в исходной постановке задач нелинейной теории упругости. Что является причиной такого неблагополучия в настоящее время неизвестно.

4. Еще одним не решенным вопросом в нелинейной механике твердого деформируемого тела является следующий. Какая характеристика вращения является адекватной для классической модели твердого деформируемого тела: ротор линейной скорости $rot\ v$ или ω, где v – линейная скорость, ω – угловая скорость, определяемая тензором поворота из полярного разложения градиента деформации?

Отметим, что в механике жидкости общепринятой характеристикой вращения является функция $rot\ v$, называемая завихренностью [2,5,6]. Однако в механике деформируемого твердого тела сформулированный вопрос иногда называют «дискуссией о поворотах» [7].

Известно, что в общем случае движения сплошной среды [7,8 9] выполняется неравенство $rot\ v \neq 2\omega$.

Казалось бы, поставленный вопрос - очень частный. Считается, что последовательную теорию классического деформируемого твердого тела, в частности – нелинейную теорию упругости, можно построить без ответа на поставленный вопрос. Однако, по мнению авторов и как будет видно из дальнейшего изложения, построение последовательной теории требует однозначного выбора характеристики вращения. Косвенным подтверждением этого служит, в частности, отсутствие вышеупомянутой теоремы единственности решения задачи Коши в нелинейной динамической теории твердого деформируемого тела.

5. Пусть для расчета напряжений и деформаций в теле допустимо использовать линейную теорию упругости. Но само тело не закреплено от жестких движений. Более того, оно может совершать произвольные нелинейные движения, т. е. иметь большие перемещения и повороты. Ясно, что описанная ситуация – это простейшая математическая модель движущегося деформируемого объекта – корабля, самолета, ракеты, искусственного спутника и т. п. Таким образом, инженерная практика потребовала решения таких задач уже сто с лишним лет назад. Тем удивительнее ситуация, что указанная задача до сих пор математически (т. е. в виде системы дифференциальных уравнений) не поставлена!

Указанные задачи решают следующим приближенным образом [10-13].

Записывают в интегральном виде законы динамики Эйлера. Решение ищут в виде конечного числа слагаемых разложения в ряд по собственным формам колебаний незакрепленного линейно-упругого тела. Эту конечную сумму подставляют в интегральные законы, после чего интегралы можно вычислить и получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций времени — коэффициентов разложения в ряд по собственным формам колебаний. Такой способ решения может считаться обоснованным только, если нам заранее известно движение конструкции в целом. При этом влияние деформируемости конструкции на ее большие перемещения и повороты можно учесть только в отдельных простейших случаях.

В дальнейшей части статьи излагается классификация математических моделей строительной механики и сплошных сред, которая может помочь, в частности, в решении сформулированных выше задач.

ПОДХОД К КЛАССИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ КОНСТРУКЦИЙ И СПЛОШНЫХ СРЕД

Запишем закон движения абсолютно твердого тела (АТТ) [1,15]:

$$r(t) - r_A(t) = P(t)\bullet(R - R_A)\,, \tag{4}$$

где R − радиус-вектор отсчетного (в момент времени t = 0) положения произвольной точки тела; $r(t)$ − радиус-вектор актуального (текущего) положения этой точки, $r(0) = R$; R_A , $r_A(t)$ − то же для произвольной, но фиксированной точки A тела; $P(t)$ тензор поворота АТТ, точкой в (4) обозначено скалярное произведение.

Угловая скорость АТТ ω определяется по тензору P формулой Пуассона [1,15]:

$$\dot{P} = \omega \times P, \tag{5}$$

где × − знак векторного умножения, точка сверху обозначает производную по времени *t*.

Формула (4) может служить математическим определением АТТ.

Для получения более детальной классификации законов движения, отличных от законов движения АТТ, удобно перейти к скоростям. Продифференцировав (4) по времени, получим известный закон распределения скоростей в АТТ (в дальнейшем опускаем обозначение аргумента t):

$$v - v_A = \omega \times (r - r_A) \tag{6}$$

Формула (6) дает зависимость $v(r)$, т. е. представление скорости в эйлеровых координатах текущего положения r. Дифференцируя (6) по r, и учитывая, что $grad\ r = I$, где I – единичный тензор, получим:

$$grad\ v + I \times\ \omega = 0 \tag{7}$$

где $grad$ − оператор-градиент в эйлеровых координатах.

Например, в декартовой системе координат

$$r = x_i e_i; \quad grad = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{8}$$

(использовано правило суммирования от 1 до 3 по повторяющемуся индексу).

Отделяя симметричную и кососимметричную части равенства (7), получим,

$$def\ v = 0;\ \frac{1}{2} rot\ v = \omega, \tag{9}$$

где использованы обозначения [16]:

$$def\ v = 0.5(grad\ v\ + (grad\ v)^T);\ \ rot\ v = grad \times v\,; \tag{10}$$

верхний индекс T означает транспонирование тензора.

Несложно доказать, что, с точностью до начального положения в пространстве, условия (9) эквивалентны (4). Таким образом, (9) может служить «скоростным» определением АТТ.

Поставим теперь вопрос о построении более сложных моделей движения, чем движение АТТ. Обычно считается, что любое отклонение от закона движения (4) соответствует деформируемой среде. Это означает, что мы одновременно отказываемся от обоих ограничений, даваемых равенствами (9). Но ведь возможны промежуточные варианты, когда нарушается только одно из ограничений (9). Рассмотрим возможные случаи:

1)
$$def\ v = 0;\ \frac{1}{2} rot\ v \neq \omega. \tag{11}$$

Условиям (11) соответствует, например, гиростат: абсолютно твердое несущее тело, внутри которого находятся способные независимо вращаться роторы, оси вращения которых жестко закреплены относительно несущего тела. С некоторыми задачами теории гиростата можно ознакомиться по работам [15, 17];

2)
$$def\ v \neq 0;\ \frac{1}{2} rot\ v = \omega. \tag{12}$$

Условиям (12) соответствует деформируемая среда, которую уместно назвать средой со стесненным вращением, т. к. повороты в такой среде не являются независимыми, а полностью определяются перемещениями. По мнению авторов, именно этот случай соответствует классическим теориям газа, жидкости и деформируемого твердого тела;

3) $$def\ v \neq 0;\ \frac{1}{2} rot\ v\ \neq \omega. \tag{13}$$

Условия (13) соответствуют деформируемой среде со свободным вращением. Повороты в такой среде независимы от перемещений. Примерами таких сред являются: стержень Коссера -Тимошенко, трехмерная среда Коссера, в частности, моментная теория упругости и др.

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И ДЕФОРМИРУЕМЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД

Условия (9) - (13) дают кинематическую классификацию математических моделей механики. Если ограничиться моделями деформируемых сред (12), (13), то для полноты картины следует добавить классификацию по типу внутренних усилий (отсутствие или наличие моментных напряжений).

В результате математические модели разбиваются на четыре класса I – IV и получается приведенная в таблице 1 классификация математических моделей строительной механики и сплошных сред, предложенная В.В. Лалиным в 2008 году [18,19].

Таблица 1. Классификация математических моделей строительной механики и деформируемых сплошных сред
Table 1. Classification of mathematical models of structural mechanics and deformable continuous media

Среды	Среды со стесненным вращением	Среды со свободным вращением
Безмоментные среды	I $M = 0,\quad \frac{1}{2} rot\ v = \omega$	II $M = 0,\quad \frac{1}{2} rot\ v \neq \omega$
Моментные среды	III $M \neq 0,\quad \frac{1}{2} rot\ v = \omega$	IV $M \neq 0,\quad \frac{1}{2} rot\ v \neq \omega$

Замечания.

1. Безмоментная среда — это среда, в которой отличны от нуля только обычные напряжения, моментные напряжения равны нулю ($M = 0$). Моментная среда — это среда, в которой отличны от нуля и обычные и моментные напряжения.

В одномерных моделях (стержни, нити) роль моментных напряжений играют изгибающие и крутящие моменты. Таким образом, безмоментная одномерная среда — это одномерный объект, в котором отсутствуют внутренние моменты, а есть только внутренние усилия.

2. Предложенная классификация инвариантна по отношению к фазовому состоянию сплошной среды: она равно применима к газам, жидкостям и деформируемым твердым телам.

3. Предложенная классификация инвариантна по отношению к уравнениям состояния (определяющим уравнениям): она равно применима к упругим, пластичным и вязким средам.

4. В динамических задачах для сред со свободным вращением (классы II, IV) необходимо учитывать инерцию на поворот. Тензор обычных напряжений в таких средах является несимметричным.

Рассмотрим, каким моделям соответствуют выделенные четыре класса I - IV, например, для трехмерных упругих сред.

Класс IV - это среда Коссера или моментная теория упругости, которая была предложена в работе [20] и активно развивается с 60-х годов XX века [21-24]. Класс III — это моментная теория упругости со стесненным вращением [21-23]. Класс I — это классическая теория упругости, в которой, однако, до настоящего времени условие $rot\ v = 2\ \omega$ в нелинейных задачах не использовалось. Класс II — это сравнительно малоизвестная безмоментная среда со свободным вращением, которая была предложена в работе [25] и в настоящее время получила название «редуцированная среда Коссера» (Reduced Cosserat Continuum) [26-28].

Отметим одну особенность среды из класса II. По мнению авторов, в редуцированной среде Коссера нельзя задавать внешние моментные воздействия. Действительно, внешние поверхностные моментные воздействия отсутствуют в такой среде по определению - их нечем уравновесить, так как моментные напряжения равны нулю. Логично предположить, что и внешние объемные моментные воздействия в такой среде должны отсутствовать. Тогда второе («моментное») уравнение движения принимает вид:

$$\tau_{\times} = (J \cdot \omega)^{\cdot}, \tag{14}$$

где $\tau_\times$ − векторный инвариант тензора напряжений; J − объемная плотность тензора инерции; ω − угловая скорость.

В статике правая часть уравнения (14) обращается в нуль, следовательно, становится равен нулю векторный инвариант тензора напряжений, что означает, что тензор напряжений становится симметричным. Таким образом, статические задачи для классов I и II становятся неотличимыми или, другими словами, в статике упругая редуцированная среда Коссера переходит в классическую теорию упругости. Именно этот факт, по мнению авторов, является причиной того, что существование сред из класса П так долго ускользало от внимания исследователей.

Рассмотрим, каким моделям соответствуют выделенные четыре класса I - IV для одномерных сред.

Класс IV — это стержень Коссера – Тимошенко [29 - 31], в настоящее время именно эта теория наиболее широко используется для решения нелинейных задач. Класс Ш — это классический стержень Бернулли — Эйлера [29, 31]. Класс I — это классическая гибкая нить [32]. Класс II — это неклассическая нить, в которой отсутствуют изгибающие моменты, но, кроме продольных сил, есть и перерезывающие силы. Насколько известно авторам, этот класс задач является совершенно не исследованным, не поставлены и не изучены даже линейные задачи. Как и для трехмерных сред, неклассическая нить переходит в классическую в задачах статики. Возможно, именно теория неклассической нити позволит построить решение задачи об уединенной волне на веревке, упомянутой в начале статьи.

В настоящее время активно развиваются теории микрополярных жидкостей [33 - 35]. При этом рассматриваются жидкости с моментными напряжениями, т. е. жидкости из классов III и IV. Насколько известно авторам, отсутствуют работы, развивающие теорию жидкости из класса II – наиболее простую теорию неклассической жидкости с несимметричным тензором напряжений. Может быть, именно построение теории вязкой жидкости из класса II позволит простейшим способом устранить парадокс, отмеченный в начале статьи.

Одним из активно развивающихся в настоящее время разделов нелинейной строительной механики является геометрически нелинейная теория пластичности - теория пластичности с большими деформациями [36-39]. Разумеется, при этом неявно предполагается, что строится теория пластической среды классического типа, т. е. из класса I.

Однако, в известных авторам работах не используется кинематическое условие:

$$\frac{1}{2} rot\ v = \omega\ , \tag{15}$$

которому должно удовлетворять любое движение классической сплошной среды независимо от уравнения состояния. Условие (15), по мнению авторов, является кинематическим определением классической сплошной среды. Для того, чтобы понять, какие может вызвать осложнения не учет этого условия, приведем формулировку теоремы, которую, уместно назвать основной теоремой кинематики классической сплошной среды.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА КИНЕМАТИКИ КЛАССИЧЕСКИХ СПЛОШНЫХ СРЕД

Пусть:

а) векторная функция $\mathrm{r(R,t)}$ - задает движение точек сплошной среды, R - отсчетные (лагранжевы) координаты, $\mathrm{r(R,0)= R}$;

б) F - градиент деформации, соответствующий движению $\mathrm{r(R,t)}$;

в) $\mathrm{F = P \cdot U}$ - полярное разложение тензора F, P - ортогональный тензор поворота, U — правый тензор удлинений;

г) $\mathrm{J = \ detF \ = \ detU}$ - определитель тензора F;

д) $\mathrm{U = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k d_k d_k}$ - спектральное разложение тензора U ,

λ_k − собственные числа, $\mathrm{d_k}$ − собственные векторы тензора U ;

е) $\nu = \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \mathrm{t}}$ − скорость (линейная) точек среды;

ж) ω − угловая скорость, соответствующая тензору P, $\dot{\mathrm{P}} = \omega \times \mathrm{P}$, точка сверху обозначает частную производную по времени t.

Тогда, если сплошная среда является классической, т. е. относится к классу I − классу безмоментных сред со стесненным вращением, то следующие условия эквивалентны:

1) $$\dot{\mathrm{U}} \cdot \mathrm{U} = \mathrm{U} \cdot \dot{\mathrm{U}}; \tag{16}$$

2) $$\mathrm{U(R,t)} = \lambda_1\mathrm{(R,t)d_1(R)d_1(R)} + \lambda_2\mathrm{(R,t)d_2(R)d_2(R)} + \lambda_3\mathrm{(R,t)d_3(R)d_3(R)} \tag{17}$$

3)
$$\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot} \mathrm{v} \tag{18}$$
(здесь дифференцирование производится по эйлеровым координатам, т. е. по координатам вектора r);

4)
$$\omega = \frac{1}{2}\left(\mathrm{F}^{-1}\cdot\dot{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}\right)_{\mathrm{X}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{J}^{-1}\mathrm{F}\,\cdot\left(\dot{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{F}\right)_{\times} \tag{19}$$
(крест обозначает векторный инвариант тензора).

Замечания.

1. В доказательстве теоремы не тривиальным моментом является импликация (16) => (17), однако, этот факт приведен в упражнениях в работе [8]. Остальные пункты могут быть доказаны сравнительно несложными средствами тензорной алгебры, в связи с необходимостью экономии места доказательство опускается.
2. Равенство (17) означает, что собственные векторы правого тензора удлинений не зависят от времени и определяются только начальными условиями.
3. Равенства (18) и (19) ставят точку в «дискуссии о поворотах». Значение этих пунктов в том, что они дают правила вычисления угловой скорости только через линейные скорости и перемещения, без необходимости достаточно трудоемкого вычисления тензора поворота P из полярного разложения градиента деформации и его дальнейшего дифференцирования по времени.

Формула (18) дает простое правило вычисления угловой скорости в эйлеровых координатах, формулы (19) – в лагранжевых координатах. Последнее становится очевидным, если вспомнить, что:
$$F^T = I + Grad\, u;\ \dot{F}^T = Grad\, v\ ;\ v = \dot{u}, \tag{20}$$
где u — вектор перемещений; $Grad$ — оператор-градиент в лагранжевых координатах; I — единичный тензор.

Вторая формула (19) выглядит сложнее первого выражения для угловой скорости ω, однако, имеет то преимущество, что не требует обращения тензора F.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в теореме условия налагают ограничения на возможные движения классической сплошной среды. Возможно, именно учет этих ограничений позволит, наконец, доказать теорему единственности решения задачи Коши в нелинейной динамической теории упругости.

Теперь можно вернуться к пояснению тех осложнений, которые может повлечь не учет ограничений, накладываемых приведенной теоремой на возможные движения классических сплошных сред.

Пусть дано движение $r(R,t)$. Как убедиться, может ли классическая сплошная среда двигаться по такому закону? Согласно приведенной теореме, достаточно проверить выполнение равенства (16). Если это равенство не выполняется, то классическая сплошная среда не может двигаться по закону $r(R,t)$.

В частности, легко убедиться, что классическая сплошная среда не может двигаться по закону простого сдвига [8,9] (ниже c = const):
$$x_2\,(t) = X_2\ ;\ x_3\,(t) = X_3\ ;\ x_1\,(t) = X_1 + ctX_2\ . \tag{21}$$
А ведь случай простого сдвига является широко используемой тестовой задачей, например, при построении геометрически нелинейной теории пластичности, а также при тестировании выражений для объективных производных тензора напряжений [36,40,41].

Теперь становится ясным, что двигаться по закону простого сдвига могут только неклассические среды из классов II и IV, т. е. сплошные среды с несимметричным тензором напряжений. Если же при построении геометрически нелинейной теории пластичности требовать симметрии тензора напряжений, т. е. оставаться в рамках классической сплошной среды, то использование движения по закону простого сдвига не допустимо.

Подчеркнем, что никаких ограничений на деформации или на конечное положение деформируемого тела приведенная теорема не налагает, ограничения накладываются только на путь, т. е. на закон движения, по которому тело может достичь заданного конечного положения. Отсюда, кстати, появляется еще одна задача, требующая решения: дать характеризацию законов движения, возможных для классической сплошной среды, т. е. описать класс возможных движений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Жилин П. А. Основы рациональной механики. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та. 2018. 636 с.
2.Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа. 2003. 840 с.

3.Волобуев А. Н. Основы несимметричной гидродинамики. – Самара: ООО «СамЛюксПринт». 2011. 188 с.
4.Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 336 с.
5.Серрин Дж. Математические основы механики жидкости. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2001. 256 с.
6.Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир. 1981. 408 с.
7.Елисеев В. В. Механика упругих тел. – СПб.: Изд-во СПбГТУ. 1999. 342 с. EDN: ZERJQX
8.Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир. 1975. 592 с.
9.Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука. 1980. 512 с.
10.Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. — М.: Машиностроение, 1987. 232 с.
11.Баничук Н.В., Карпов И. И., Климов Д. М. Механика больших космических конструкций. – М.: Факториал. 1997. 302 с.
12.Bauchau O.A. Flexible Multibody Dynamics. Springer, 2011, 728 p.
13.Vallery H., Schwab A. Advanced Dynamics, Delft University of Technology. 2020. 620 p.
14.Flores P., Ambrósio J., Lankarani H. Contact-impact events with friction in multibody dynamics: Back to basics. // Mechanism and Machine Theory, V. 184, 2023, pp. 1-35. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2023.105305
15.Жилин П. А. Динамика твердого тела. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2015. 640 с.
16.Лурье А. И. Теория упругости. – М.: Наука. 1970. 940 с.
17.Жилин ПЛ., Сорокин С. А. Мультироторный гиростат на нелинейно упругом основании. ИПМаш РАН: Препринт № 140, 1997. 83 с.
18.Лалин В.В. О классификации сплошных сред. Новые модели в строительной механике. // VII международная конференция «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте», Тезисы. СПб: Изд-во ПГУПС, 2008, с. 123.
19.Zdanchuk E., Lalin V. The Theory of Continuous Medium with Free Rotation without Coupled Stresses. // Proceedings of the XXXVlII Summer school – Conference ”Advanced Problems in Mechanics”, St. Petersburg. IPME RAS. 2010, p. 103.
20.Cosserat E. et F. Theorie des corps deformables. Hermann, Paris, 1909, 226 p.
21.Новацкий В. Теория упругости. – М: Мир. 1975. 872 с.
22.Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. Foundations of Micropolar Mechanics. New York, Springer, 2013, 145 p.
23.Eringen A.C. Microcontinuum Field Theory I. Foundation and solids. New York, Springer. 1999, 325 p.
24.Li J., Ostoja-Starzewski M. Micropolar mechanics of product fractal media. // Proc. R. Soc. A 478: 20210770. 2022, pp. 1-16. DOI: 10.1098/rspa.2021.0770
25.Schwartz L. M., Johnson D.L., Feng S. Vibrational modes in granular materials. // Physical review letters, 1984, V.52, No. 10, pp. 831-834. DOI:10.1103/PHYSREVLETT.52.831
26.Grekova E.F. Nonlinear isotropic elastic reduced Cosserat continuum as a possible model for geomedium and geomaterials. Spherica1 prestressed state in semilinear mateial. // Journal of seismology, 2012, V. 16, No. 4, pp. 695-707. EDN: SPQCDF
27.Lalin V., Zdanchuk E. Nonlinear thermodynamic model for reduced Cosserat continuum. // International Journa1 of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2014, V. 8, pp. 208-213. EDN: UGMULZ
28.Grekova E., Porubov A., dell'Isola F. Reduced Linear Constrained Elastic and Viscoelastic Homogeneous Cosserat Media as Acoustic Metamaterials // Symmetry. 2020, 12, 521. pp. 1-22. EDN: DFYTXU
29.Жилин П. А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. – СПб: Изд-во Политехнического университета. 2007. 102 с. EDN: QJSHUT
30.Iesan D. Classical and Generalised Models of Elastic Rods. Boca Raton. CRC Press, 2009, 369 p.
31.K. R. Rajagopal, C. Rodriguez. Special Cosserat rods with rate-dependent evolving natural configurations. // arXiv:2304.04633 [math-ph], 2023, pp. 1-27. DOI: 10.48550/arXiv.2304.04633
32.Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. – М.: Наука. 1980. 240 с.
33.Eringen A.C. Theory of micropolar f1uids. // J. Math. and Mech., 1966, Vol. 16, No. 1, pp. 1-18.
34.Эринген А.К. Теория микрополярных жидкостей. // Механика. – М.: Мир, 1969, №4, с. 79 -93.
35.Khan A., Ullah S., Shah K., Alqudah M., Abdeljawad T., Ghani F. Theory and Semi-Analytical Study of Micropolar Fluid Dynamics through a Porous Channel. // Computer Modeling in Engineering & Sciences. 2023, V.136, № 2, pp. 1473 -1486. DOI: 10.32604/cmes.2022.023019
36.Поздеев А.А., Трусов П. В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука. 1986. 231 с.
37.Wu H.C. Continuum mechanics and plasticity. Chapman & Hall, CRC Press, 2005, 676 p.
38.Borja R.I. Plasticity. Modeling & Computation. Springer, 2013, 255 p.
39. Bruhns O. Large deformation plasticity. // Acta Mechanica Sinica, 2021, https://doi.org/10.1007/s10409-020-00926-7, pp. 1-28.

40.Садовская О. В., Садовский В. М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. – М.: Физматлит. 2008. 368 с.

41.Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. – М.: Физматлит, 2013. 320 с.

ОБ АВТОРАХ

Владимир Владимирович Лалин – профессор Высшей школы промышленно-гражданского и дорожного строительства. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ). 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29. E-mail: vllalin@yandex.ru; профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, Российский университет дружбы народов (РУДН). 115419, Россия, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3. E-mail: lalin-vv@rudn.ru

Ирина Игоревна Лалина – старший преподаватель Высшей школы промышленно-гражданского и дорожного строительства. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ). 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29. E-mail: i.lalina@yandex.ru

Елизавета Викторовна Зданчук – старший преподаватель Высшей школы промышленно-гражданского и дорожного строительства. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ). 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29. E-mail: zelizaveta@yandex.ru

Кирилл Константинович Никоноров – студент Высшей школы промышленно-гражданского и дорожного строительства. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ). 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29. E-mail: kkniko@mail.ru

ABOUT THE AUTHORS

Vladimir V. Lalin – professor of the Higher School of Industrial, Civil and Road Construction. Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (SPbPU). 195251, Russia, St.Petersburg, Polytechnicheskaya st., 29. E-mail: ivanov_ii@mail.ru; professor of the Department of Construction Technologies and Structural Materials. Peoples' Friendship University of Russia. 115419, Russia, Moscow, Ordzhonikidze st., 3. E-mail: lalin-vv@rudn.ru

Irina I. Lalina – Senior lecturer of the Higher School of Industrial, Civil and Road Construction. Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (SPbPU). 195251, Russia, St.Petersburg, Polytechnicheskaya st., 29. E-mail: i.lalina@yandex.ru

Elizaveta V. Zdanchuk – Senior lecturer of the Higher School of Industrial, Civil and Road Construction. Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (SPbPU). 195251, Russia, St.Petersburg, Polytechnicheskaya st., 29. E-mail: zelizaveta@yandex.ru

Kiril K. Nikonorov – student of the Higher School of Industrial, Civil and Road Construction. Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (SPbPU). 195251, Russia, St.Petersburg, Polytechnicheskaya st., 29. E-mail: kkniko@mail.ru