УДК 699.8

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В ОГРАЖДАЮЩИХ КОНСТРУКЦИЯХ ЗДАНИЙ, СООРУЖЕНИЙ, ИНЖЕНЕРНЫХ И ТЕПЛОВЫХ СЕТЯХ

Р.А. Садыков, Э.Ю. Абдуллазянов, Л.С. Сабитов, А.К. Мухаметзянова
Казанский государственный энергетический университет, г.Казань (Российская Федерация)

Аннотация. Рассматриваются вопросы переноса теплоты, воздухопроницания и влаги в одно- и многослойных ограждающих конструкциях (ОК) зданий, сооружений, инженерных, тепловых и электрических сетях, обусловленные действием внешних климатических факторов и работой систем отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха. Рассмотрена общая постановка задачи процессов переноса с учетом внутренних объемных или локальных источников (стоков) переноса субстанции. Разработана обобщенная математическая модель (ММ) нестационарного переноса (теплоты, вещества и т.п.) для тел различной канонической формы (полупространство, пластина, полые цилиндр и шар) и их аналогов. В частных случаях ММ учтены зависимости теплофизических характеристик (сплошной изотропной) среды, параметров граничных условий, мощностей объемных источников (стоков) переноса субстанций от потенциалов переноса (температуры, влагосодержания и др.) или от четырехмерного пространства событий. Рассмотрены аналитические решения поставленной обобщенной краевой задачи (КЗ) для неустановившихся и стационарных процессов переноса субстанций при обобщенных граничных условиях (первого, второго, третьего и смешанного рода) на внешней поверхности или контуре исследуемой области. При постоянных параметрах системы нестационарных процессов переноса показан алгоритм решения дифференциальных уравнений переноса методом Фурье при переменных параметрах условий однозначности. Полученные ММ, аналитические и приближенные решения прямых КЗ переноса приведены к удобному для этих целей критериальному виду.

Ключевые слова: уравнение, перенос, потенциал, процесс, математическая модель, решение, критерий, ограждение, конструкция, теплофизика здания, сооружения, сети.

Ссылка для цитирования: Садыков Р.А., Абдуллазянов Э.Ю., Сабитов Л.С., Мухаметзянова А.К. Математическое моделирование процессов переноса в ограждающих конструкциях зданий, сооружений, инженерных и тепловых сетях // Инженерные исследования. 2024. №2(17). С. 36-41. EDN: XPMWUM

MATHEMATICAL MODELING OF THE TRANSFER PROCESSES IN THE ENCLOSING STRUCTURES OF BUILDINGS, CONSTRUCTIONS, THERMAL AND ENGINEERING NETWORKS

R.A. Sadykov, E.Y. Abdullazyanov, L.S. Sabitov, A.K. Mukhametzianova
Kazan state power engineering university, Kazan (Russian Federation)

Abstract. The problems of heat and moisture transfer, air permeability in single and enclosure constructions (EC) of buildings, facilities and heat, engineering and electrical networks under the influence of environmental factors and the work of heating, ventilation and air conditioning has been analyzed. A general definition of the problem taking into account the transfer processes of internal voluminous or local heat source (drainage) has been considered. A generalized mathematical model (MM) of unsteady heat and mass transfer process for bodies of different canonical form (half-plate, hollow cylinder and sphere) and their analogues has been developed. In particular cases of the mathematical model, the dependence of the physical characteristics of the (solid isotropic) medium, the boundary conditions parameters, the capacity of the mass substance transfer sources (drains) from the transfer potentials (temperature, moisture content) or the space-time continuum has been taken into consideration. The analytical solution of the generalized non-stationary and stationary heat and mass transfer problem under the general boundary conditions of different (first, second, third and mixed) kind on the outline of the researched area has been scrutinized. For constant system parameters of non-stationary transfer processes an algorithm for solving differential transfer equations using Fourier transformation with variable parameters of different kind of boundary conditions has been shown. The obtained MM, analytical and approximate solutions of direct transfer short circuits are given a criterion form convenient for these purposes.

Keywords: equation, mass and heat transfer, process, mathematical model, solution, criteria, enclosure construction, building envelope, thermophysics of building, facilities, networks.

For citation: Sadykov R.A., Abdullazyanov E.Y., Sabitov L.S., Mukhametzianova A.K. Mathematical modeling of the transfer processes in the enclosing structures of buildings, constructions, thermal and engineering networks // Inzhenernyye issledovaniya [Engineering Research]. 2024. No.2(17). Pp. 36-41. EDN: XPMWUM

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время значение теплофизики зданий и различных сооружений усиливается в связи с широким применением индустриальных конструкций из современных материалов, повышением требований к комфортности внутреннего климата помещений, а также развитием строительства в районах с резко выраженными климатическими воздействиями. Поэтому оптимальное формирование полей потенциалов переноса тепла и вещества в многослойных ограждающих конструкциях (ОК) с помощью автоматизированных систем управления теплогазоснабжения, вентиляции и кондиционирования воздуха в значительной степени определяет выбор проектного решения, экономичность технических и технологических процессов, массоемкость, габариты и эксплуатационные характеристики инженерного оборудования, здания или всего сооружения в целом.

Нормативные данные СНиП 23-02-2003 „Тепловая защита зданий“ и литературный анализ исследований [1-4] показывает, что расчёт тепловлажностных характеристик, наружных ограждающих конструкций в основном проводится при установившихся условиях параметров состояния строительного объекта и постоянных теплофизических свойствах отдельных слоев ОК. Кроме того в подобных расчётах и ММ не учитывается наличие внутренних источников (или стоков) тепла и вещества во временных периодах конденсации и испарения влаги в ОК [2-5] в периоды с отрицательными (градусо-сутки отопительного периода) и положительными температурами наружного воздуха (t ≥ 8°C). При стационарных условиях диффузии водяного пара расчёт влажностного режима ОК в основном проводят только приближенно – графическим методом [1-3]. Поэтому проблема обобщенной постановки КЗ процессов переноса субстанций в ОК и анализ возможностей её аналитического и приближенного решения в зависимости от заданных условий однозначности является актуальной.

МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

На основании общепринятых допущений, учета фильтрации воздуха через ОК и наличия объёмных положительных или отрицательных источников переноса субстанций сформулирована обобщенная система нелинейных дифференциальных уравнений нестационарного конвективного переноса в ОК:

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}\vec{\mathrm{s}}[\vec{\Pi}(\vec{\mathrm{r}},\tau)]+\mathrm{sgn}\,[\vec{\mathrm{J}}]<\nabla,\vec{\mathrm{J}}[\vec{\Pi}(\vec{\mathrm{r}},\tau)]>\\&+\mathrm{sgn}[\vec{\mathrm{I}}]\vec{\mathrm{I}}[\vec{\Pi}(\vec{\mathrm{r}},\tau)]=\vec{0},\end{aligned}\tag{1}$$

где $\vec{\mathrm{s}}$ - вектор-столбец субстанций (скалярные величины), $\vec{\mathrm{J}}$ – вектор-столбец потоков (векторные величины), $\vec{\Pi}$ – вектор-строка потенциалов переноса или параметров состояния системы (скалярные величины), $\vec{\mathrm{I}}$ – вектор-столбец положительных или отрицательных объемных источников переноса субстанций (скалярные величины), D - производная Лагранжа, $\nabla(\partial_x,\partial_y,\partial_z)$ - оператор Гамильтона, $\vec{\mathrm{r}}(x,y,z)$ – вектор пространственных координат, τ - время, $\mathrm{sgn}[\cdot]$ – функция знака, $<\cdot,\cdot>$ - скалярное произведение векторов.

Система (1) совместно с уравнениями Навье-Стокса, неразрывности, термодинамических параметров состояния системы и условиями однозначности образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений (СДУ) нелинейного конвективного переноса субстанций. Аналитическое решение представленной СДУ осуществимо только при определенных упрощениях. Применительно к неподвижным ОК СДУ (1) после ряда допущений и преобразований относительно потенциалов нестационарного переноса можно записать в виде:

$$\begin{aligned}&\vec{\Pi}_\tau(\vec{\mathrm{r}},\tau)+\mathrm{sgn}\,[\vec{\mathrm{I}}]<\nabla,\vec{\mathrm{J}}[\vec{\Pi}(\vec{\mathrm{r}},\tau)]>\\&+\mathrm{sgn}[\vec{\mathrm{I}}]\vec{\mathrm{I}}[\vec{\Pi}(\vec{\mathrm{r}},\tau)]=\vec{0}.\end{aligned}\tag{2}$$

Для выделения единственного решения уравнений переноса необходимо к уравнению (2) присоединить начальные и ГУ. Решением КЗ будут функции $\vec{\Pi}(\vec{\mathrm{r}},\tau)$, если соблюдаются следующие свойства [6, 7, 12].

1. $\vec{\Pi}(\vec{\mathrm{r}},\tau)$ определены и неприрывны в замкнутой области $\overline{\Omega}:\ \vec{a}\le\vec{r}\le\vec{b},\tau_0\le\tau\le\tau_k,\tau_0\ge 0$;
2. $\vec{\Pi}(\vec{\mathrm{r}},\tau)$ удовлетворяют уравнениям переноса в открытой области $\Omega:\ \vec{a}<\vec{r}<\vec{b},\tau>\tau_0$;

3. $\vec{\Pi}(\mathrm{r},\tau)$ удовлетворяют начальным и ГУ, т.е. $\vec{\Pi}(\mathrm{r},\tau_0)=\vec{\Pi}_0(\mathrm{r})$, $\mathrm{r}\in\overline{\Omega}$, $l_{ij}[\vec{\Pi}]=\vec{\varphi}_{ij}(\mathrm{r},\tau)$, $(\mathrm{r},\tau)\in F_i$ $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m_i})$, $\tau\ge\tau_0$, где $\vec{\Pi}_0(\mathrm{r})$, $\vec{\varphi}_{ij}(\mathrm{r},\tau)$ - непрерывные функции.

4. Для непрерывности $\vec{\Pi}(\mathrm{r},\tau)$ в $\overline{\Omega}$ необходимо удовлетворение условиям сопряжения («склеивания») $\vec{\Pi}_0(\mathrm{r},\vec{a})=\vec{\varphi}_{ij}(\vec{r},\tau_0)=\vec{\Pi}\ (\vec{\mathrm{a}},\tau_0)$ и $\vec{\Pi}_0(\mathrm{r},\vec{b})=\vec{\varphi}_{ij+1}(\vec{r},\tau_0)=\vec{\Pi}\ (\vec{b},\tau_0)$.

Если параметры системы (теплофизические, термодинамические, физико-химические и др. характеристики) постоянны, то уравнение (2) с обобщенными условиями однозначности (обобщенные начальные и ГУ первого, второго, третьего и смешанного рода) будет иметь вид:

$$\begin{cases} L[\vec{\Pi}]=\mathrm{sgn}[\vec{I}]\vec{I}\left[\vec{\Pi}(\mathrm{r},\tau)\right] \ ,\mathrm{r}\in\Omega,\tau>\tau_0, & (3)\\ L[\vec{\Pi}]=\vec{\Pi}_\tau(\mathrm{r},\tau)-[k]\Delta\vec{\Pi}, & \\ \vec{\Pi}(\mathrm{r},\tau_0)\ =\vec{\Pi}_0(\mathrm{r}),\quad \mathrm{r}\in\overline{\Omega}\ , & (4)\\ l_{ij}[\vec{\Pi}]=\vec{\phi}_{ij}(\mathrm{r},\tau), & (5)\\ (\mathrm{r},\tau)\in F_i\quad (i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m_i}),\quad \tau\ge\tau_0, & \\ l_{ij}[\vec{\Pi}]=\vec{\gamma}_{ij+1}(\mathrm{r},\tau)+\vec{\gamma}_{ij}<\nabla\vec{\Pi}(\mathrm{r},\tau),\vec{e}>, & \\ F=F_1\bigcup F_2...\bigcup F_\mathrm{n};\overline{\Omega}=\Omega\bigcup F, & \\ |\,\vec{\gamma}_{ij}\,|+|\,\vec{\gamma}_{ij+1}\,|\ne 0. & \end{cases}$$

где: $\vec{\Pi}$ – вектор-столбец потенциалов переноса, $[K]$-квадратная матрица постоянных коэффициентов для сопряжённых или вектор – столбец для невзаимосвязанных процессов переноса [4-6], $\vec{\Pi}_\tau(\mathrm{r},\tau)$ – частная производная потенциалов переноса по τ, Δ – Лапласиан, $\vec{\Pi}_0(\mathrm{r})$ – вектор-функция начального распределения потенциалов переноса, τ_0 – начальное время процесса, F (и F_i) – кусочно-гладкая поверхность (и его i-я часть) , ограничивающая область $\overline{\Omega}\in R^n$, R^n - n-мерное евклидово пространство, $(\vec{\mathrm{r}},\tau)\equiv(x,y,z,\tau)\equiv(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4,(x_4\equiv\tau)$-четырехмерное пространство событий, $\vec{e}$ – единичный вектор, $\vec{\gamma}_{ij},\vec{\gamma}_{ij+1}=const$, L- линейный дифференциальный оператор по независимым переменным второго порядка, l_{ij}- дифференциальные операторы по $\vec{\mathrm{r}}$ и τ порядка не выше первого (или конечные соотношения), а $\vec{\varphi}_{ij}$ (r,τ)- заданные функции, фактически это потенциалы переноса (температура, влагосодержание, концентрация, давление и т.д.) обтекающих исследуемый объект потоков изменяющихся с течением времени.

При рассмотрении физических процессов функции $\vec{\varphi}_{ij}$ определяются приближенно из опытных данных, поэтому решение такой смешанной КЗ имеет практическую ценность лишь в том случае, если небольшие ошибки начальных и ГУ не могут привести к большим отклонениям соответствующего решения КЗ. В этом случае смешанная КЗ поставлена корректно или непрерывно зависит от начальных и ГУ.

Решения смешанной КЗ (3)-(5) можно построить методом Фурье [7-15]. Для этого предварительной заменой:

$$\vec{\Pi}(\mathrm{r},\tau)=\vec{\mathrm{U}}(\mathrm{r},\tau)+\vec{\upsilon}\left[\mathrm{r},\vec{\gamma}_{ij+1},\vec{\varphi}_{ij}(\mathrm{r},\tau)\right]\ , \tag{6}$$

переведём КЗ (3)-(5) относительно $\vec{\Pi}(\vec{\mathrm{x}},\tau)$ с неоднородными ГУ к КЗ с однородными ГУ относительно $\vec{\mathrm{U}}(\vec{\mathrm{x}},\tau)$:

$$\begin{cases} \left[\ \vec{\mathrm{U}}(\mathrm{r},\tau)\right]_\tau=\left[K\right]\Delta\vec{\mathrm{U}}(\mathrm{r},\tau)\pm\vec{\mathrm{I}}_*(\mathrm{r},\tau), & (7)\\ \vec{\mathrm{U}}(\mathrm{r},\tau_0)\ =\vec{\mathrm{U}}_0(\mathrm{r}), & (8)\\ \vec{\gamma}_{ij}<\nabla\vec{U},\vec{e}>+\vec{\gamma}_{ij+1}\vec{U}=\vec{0},\mathrm{r}\in\mathrm{F_i} & (9)\end{cases}$$

где $\vec{\mathrm{I}}_*(\vec{\mathrm{r}},\tau)$ - вектор-столбец модифицированных источников переноса.

Далее ищем частные решения однородной КЗ (7)-(9) (при $\vec{\mathrm{I}}_*(\vec{\mathrm{r}},\tau)=\vec{0}$) в форме с разделяющимися переменными:

$$\vec{U}(\vec{\mathrm{r}},\tau)=T(\tau)\vec{X}(\vec{\mathrm{r}}). \tag{10}$$

Подставляя (10) в однородную краевую задачу, получаем известный частный слуйчай задачи Штурма-Лиувилля для нахождения собственных функций $\vec{X}(\vec{\mathrm{r}})$ и собственных чисел υ:

$$\begin{cases}\Delta\vec{X}(\vec{\mathrm{r}})+\upsilon^2\vec{X}(\vec{\mathrm{r}})=0, & (11)\\ \gamma_{1,i}<\nabla\vec{X}(\vec{\mathrm{r}},\tau),\vec{e}>|_F-\gamma_{2,i}\vec{X}(\vec{\mathrm{r}})=0, & (12)\end{cases}$$

Найденные координатные функции $\vec{X}_n(\vec{\mathrm{r}})$ ортогональны в области Ω относительно веса $\rho(\vec{\mathrm{r}})$ (в частности, равное: $1,\mathrm{r},\mathrm{r}^2$ - соответственно для пластины цилиндра, сферы), а $\nu_n\geq 0$, тогда:

$$\vec{U}(\vec{\mathrm{r}},\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(\tau)\vec{X}_n(\vec{\mathrm{r}}). \tag{13}$$

Разлагая далее $\vec{I}_*(\vec{\mathrm{r}},\tau)$ в ряд Фурье по $\vec{X}_n(\vec{\mathrm{r}})$ получим:

$$\vec{I}_*(\vec{\mathrm{x}},\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}k_n(\tau)\vec{X}_n(\vec{\mathrm{r}}) \quad , \tag{14}$$

где:

$$k_n=\frac{1}{H_n}\int_{\Omega}I_*(\vec{\mathrm{r}},\tau)\vec{X}_n(\vec{\mathrm{r}})\rho(\vec{\mathrm{r}})dV \quad , \tag{15}$$

$$H_n=\int_{\Omega}\vec{X}_n^2(\vec{\mathrm{r}})\rho(\vec{\mathrm{r}})dV.$$

После всех преобразований и подстановки (13) в (7) и с учетом (11) и (14) уравнение процессов переноса примет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(\tau)\vec{X}_{\mathrm{n}}(\vec{\mathrm{r}})=-\mathrm{k}\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\upsilon_n^2\mathrm{T_n}(\tau)\vec{X}_n(\vec{\mathrm{r}})+\sum_{n=1}^{\infty}k_n(\tau)\vec{X}_n(\vec{\mathrm{r}}), \tag{16}$$

откуда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка относительно $T_n(\tau)$:

$$T_n'(\tau)+k\upsilon_n^2T_n(\tau)-k_n(\tau)=0. \tag{17}$$

Начальные значения $T_n(\tau_0)$ следуют из (8) после подстановки в него (13) и разложения $\vec{U}_0(\vec{\mathrm{r}})$ в ряд Фурье по $\vec{X}_n(\vec{\mathrm{r}})$, тогда

$$T_n(\tau_0)=\frac{1}{H_n}\int_{\Omega}\vec{U}_0(\vec{\mathrm{r}})\vec{X}_n(\vec{\mathrm{r}})\rho(\vec{\mathrm{r}})dV. \tag{18}$$

Из решения ОДУ (17) с начальным условием (18) находим функции:

$$T_n(\tau)=e^{-k\upsilon_n^2\tau}\left[T_n(\tau_0)+\int_{\tau_0}^{\tau}k_n(t)e^{k\upsilon_n^2t}dt\right] \quad , \tag{19}$$

и окончательное замкнутое решение КЗ (3)-(5):

$$\vec{\Pi}(\vec{\mathrm{r}},\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(\tau)\vec{X}_n(\vec{\mathrm{r}})+\vec{\upsilon}[\vec{\mathrm{r}},\vec{\gamma}_{ij+1},\vec{\phi}_{ij}(\vec{\mathrm{r}},\tau)]. \tag{20}$$

Для тел канонической формы (полупространство, пластина, полые цилиндр и шар) и постоянных коэффициентов переноса уравнение (3) записывается в виде:

$$\vec{\Pi}_\tau(r,\tau)=kr^{-\Gamma}\left[r^{\Gamma}\vec{\Pi}_r(r,\tau)\right]_r+\mathrm{sgn}\left[\vec{I}\right]\vec{I}\left[\vec{\Pi}(r,\tau)\right] \quad , \tag{21}$$

$$\tau > \tau_0 \quad , \quad r_0 < r < r_1 \quad , \quad \Gamma = \overline{0,2} \quad ,$$

или в критериальной форме:

$$\vec{P}_{Fo}(R,Fo) = R^{-\Gamma}\left[R^{\Gamma}\vec{P}_R(R,Fo)\right]_R + \operatorname{sgn}\left[\vec{I}_\vartheta\right]\vec{I}_\vartheta\left[\vec{P}(R,Fo)\right] \quad , \tag{22}$$

$$Fo > Fo_0, \quad 0 < R < 1, \quad \Gamma = \overline{0,2} \quad ,$$

где в (21) r – текущая пространственная координата, Γ – геометрический фактор формы тела ($\Gamma = 0$ для полупространства и пластины, $\Gamma = 1$ для полого цилиндра и $\Gamma = 2$ для полого шара), $\vec{\Pi}_r(r,\tau)$ – производная по текущей координате r, а в (22) - $\vec{P}, \vec{P}_{Fo}$ – соответственно безразмерный вектор потенциалов переноса и его производная по переменной Фурье, Fo, Fo_0 - соответственно тепло- или массообменный критерий Фурье и критерий Фурье при $\tau = \tau_0$, $R = (r - r_0)/(r_1 - r_0)$ – безразмерная текущая координата, $\vec{I}_\vartheta$ – безразмерный вектор положительных или отрицательных объемных источников переноса субстанций.

Ряд аналитических решений уравнения (21) для определенных Γ и их аналогов при переменных внешних (климатических) параметрах граничных условий различного рода можно найти в литературе [6-9].

Для установившихся нелинейных процессов переноса в ОК с учетом фильтрации воздуха, конденсации или испарении влаги ДУ (21) относительно одного из потенциалов переноса будет:

$$\begin{aligned}&\left[k(\Pi)\Pi_r\right]_r + r^{-1}\Gamma k(\Pi)\Pi_r \\ &+ \operatorname{sgn}\left[G\right]G(\Pi)c_p(\Pi)\Pi_r \\ &+ \operatorname{sgn}\left[I\right]I(\Pi) = 0 \quad ,\end{aligned} \tag{23}$$

где $\Pi = \Pi(r) \equiv t(r)$ – температура, $k(\Pi) \equiv \lambda(t)$ – коэффициент теплопроводности, G – удельный расход воздуха, c_p – изобарная теплоемкость воздуха.

Возможные случаи аналитического решения нелинейного неоднородного дифференциального уравнения теплопереноса (23) в критериальной форме при различных параметрах системы представлены в [4-6].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована обобщенная замкнутая система дифференциальных уравнений нелинейного нестационарного конвективного переноса субстанций в ОК.

Применительно к неподвижным объектам (ограждающие конструкции зданий, сооружений, инженерных, тепловых и электрических сетей) формализована математическая модель с обобщенными внешними граничными условиями первого, второго, третьего и смешанного рода.

Показаны условия и алгоритм аналитического решения прямой нестационарной краевой задачи методом Фурье при переменных параметрах граничных условий разного рода.

Приведена постановка и указаны возможные решения краевых нестационарных и стационарных нелинейных задач для тел канонической формы (полупространство, пластина, полый цилиндр и полый шар) и их аналогов.

Параметрический анализ точных аналитических решений позволяет решать задачи оптимизации и автоматизации процессов, что является несомненным преимуществом по сравнению с численными и приближенными методами решения подобных КЗ.

Полученные математические модели, аналитические и приближенные решения поставленных краевых задач переноса приведены к критериальному виду, что удобно для масштабных переходов, практических приложений, параметрического анализа полученных решений, постановки задач оптимизации и автоматизации систем управления технологическими процессами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фокин К. Ф. Строительная теплотехника ограждающих частей зданий. М., АВОК-ПРЕСС, 2006, 256 с.
2. Богословский В. Н. Строительная теплофизика (теплофизические основы отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха). С-Пб.: Изд-во «АВОК Северо-Запад», 2006. 400 с.
3. Hugo Hens. Building physics – Heat, Air and Moisture. John Willey and Sons Limited. 2007. 270 p.

4. Садыков Р. А. Теория процессов стационарного нелинейного переноса с учетом воздухопроницаемости, конденсации или испарения парообразной влаги // Известия КГАСУ. 2011. №3 (17), С.268-276.
5. Садыков Р. А. Расчет теплотехнических характеристик ограждающих конструкций с учетом термодиффузии и фильтрации влаги. Материалы Международной научно-технической конференции «Теоретические основы теплогазоснабжения и вентиляции», М., МГСУ, 2005, С. 53-57.
6. Садыков Р.А. Моделирование тепломассопререноса в кусочно-однородных средах в зависимости от физически сопряженных необратимых процессов. // Материалы XVI Минского международного форума по тепломассообмену «MIF XVI», РБ, Минск, 16-19 мая 2022.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1996. 724 с.
8. Карташов Э. М.Аналитические методы теории теплопроводности твердых тел.М: Высшая школа, 2001. 550 с.
9. Леонтьев А. И. Теория тепломассообмена. Изд-во МГТУ, 1997. 683 с.
10. Кудинов В. А., Калашников В. В., Карташов Э. М. и др. Тепломассоперенос и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Энергоатомиздат, 1997. 425 с.
11. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967, 368 с.
12. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1969, 288 с.
13. Цой П.В. Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса. М.: Энергия, 1971, 384 с.
14. Полянин А.Д. Справочник. Линейные уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2001, 576 с.
15. Sharma J.N., Singh K. Partial differential equations for engineers and scientists. New Delhi: Narosa Publising house, 2000, 320 p.

ОБ АВТОРАХ

Ренат Ахатович Садыков– доктор технических наук, профессор. Казанский государственный энергетический университет (КГЭУ). 420066, Россия, г. Казань, Красносельская ул., д.51. E-mail: sadykov_r_a@mail.ru

Эдвард Юнусович Абдуллазянов - кандидат технических наук, доцент. Казанский государственный энергетический университет (КГЭУ). 420066, Россия, г. Казань, Красносельская ул., д.51. E-mail: kgeu@kgeu.ru

Линар Салихзанович Сабитов – доктор технических наук, доцент. Казанский государственный энергетический университет (КГЭУ). 420066, Россия, г. Казань, Красносельская ул., д.51. E-mail: sabitov-kgasu@mail.ru

Аида Камилевна Мухаметзянова – аспирант. Казанский государственный энергетический университет (КГЭУ). 420066, Россия, г. Казань, Красносельская ул., д.51. E-mail: aidamukham@gmail.com

ABOUT THE AUTHORS

Renat A. Sadykov – Doctor of Technical Sciences, Professor. Kazan State Power Engineering University (KSPU). 420066, Russia, Kazan, Krasnoselskaya st., 51. E-mail: sadykov_r_a@mail.ru

Edward Y. Abdullazyanov - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor. Kazan State Power Engineering University (KSPU). 420066, Russia, Kazan, Krasnoselskaya st., 51. E-mail: kgeu@kgeu.ru

Linar S. Sabitov – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor. Kazan State Power Engineering University (KSPU). 420066, Russia, Kazan, Krasnoselskaya st., 51. E-mail: sabitov-kgasu@mail.ru

Aida K. Mukhametzianova – Postgraduate student. Kazan State Power Engineering University (KSPU). 420066, Russia, Kazan, Krasnoselskaya st., 51. E-mail: aidamukham@gmail.com