УДК 69.04

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМАХ

Т.Р. Ибрагимов, В.В. Лалин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
г. Санкт-Петербург (Российская Федерация)

Аннотация. Предложен алгоритм расчета статически неопределимых шарнирно-стержневых конструкций (ферм) на основе метода сил. Предлагаемый метод основан на получении общего решения уравнений равновесия конструкции путем транспонирования матрицы уравнений совместности деформаций. Столбец неизвестных определяется автоматически и не требует выбора основной системы. Предложен способ получения уравнений совместности деформаций путем рассмотрения изменения площади контуров конструкции. Показано, что изменение площади независимого один раз статически неопределимого контура можно линейно выразить через деформации стержней. Матрица совместности деформаций конструкция составлена из строк для отдельных независимых контуров. Предложенный метод снимает неопределенность в формировании матрицы разрешающих уравнений метода сил, структура матрицы податливости конструкции однозначно определяется нумерацией стержней и независимых статически неопределимых контуров.

Ключевые слова: метод сил, статически неопределимые конструкции, фермы, статически неопределимые фермы, уравнение совместности деформаций, алгоритм, алгоритм метода сил, матрица податливости.

Ссылка для цитирования: Ибрагимов Т.Р., Лалин В.В. Алгоритм построения общего решения уравнений равновесия в статически неопределимых фермах // Инженерные исследования. 2024. №1 (16). С. 30-36. EDN: GNYUTN.

ALGORITHM FOR OBTAINING A GENERAL SOLUTION OF EQUILIBRIUM EQUATIONS IN STATICALLY INDETERMINATE TRUSSES

T.R. Ibragimov, V.V. Lalin
Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, St.Petersburg (Russian Federation)

Abstract. An algorithm for the calculation of statically indeterminate rod structures (trusses) based on the force method is proposed. The proposed method is based on obtaining a general solution of the equilibrium equations of the structure by transposing the matrix of strain compatibility equations. The vector of unknowns is determined automatically and does not require the selection of the primary system. A method for obtaining strain compatibility equations by considering the change in the area of the structure loops is proposed. It is shown that the change in the area of an independent statically indeterminate loop can be linearly expressed through the deformations of the rods. The joint deformation matrix of the structure is composed of rows for separated independent loops. The proposed method removes the uncertainty of the matrix of governing equations of the force method, the structure of the structure flexibility matrix is determined by the numbering of rods and independent statically indeterminable loops.

Keywords: force method, statically indeterminate structures, trussed, statically indeterminate trusses, algorithm, force method algorithm, flexibility matrix.

For citation: Ibragimov T.R., Lalin V.V. Algorithm for obtaining a general solution of equilibrium equations in statically indeterminate trusses // Inzhenernyye issledovaniya [Engineering Research]. 2024. No.1 (16). Pp. 30-36. EDN: GNYUTN.

ВВЕДЕНИЕ

Классические методы решения задачи расчета статически неопределимых стержневых конструкций, такие как метод сил и метод перемещений, обладают примерно одинаковой трудоемкостью для «ручных» расчетов и удобны в различных классах задач, что делает оба метода равноправными.

В настоящее время подавляющее большинство задач расчета строительных конструкций выполняется с использованием компьютерных систем анализа, где равноправность методов теряется, абсолютное большинство программ основаны на методе перемещений.

Преимущество метода перемещений обусловлено относительной простотой алгоритмизации. Так, нумерация узлов конструкции однозначно определяет матрицу разрешающих уравнений. При этом, матрица разрешающих уравнений имеет ленточную структуру и, как правило, хорошую обусловленность. В свою очередь, матрица разрешающих уравнений в методе сил может быть построена не единственным образом. С точки зрения классической строительной механики, это объясняется возможностью выбора основной системы бесконечным количеством способов.

Известные способы алгоритмизации метода сил могут быть разделены на три основных группы – алгебраические, топологические и смешанные.

Алгебраические методы, как правило, сводятся к построению общего решения однородных уравнений равновесия путем анализа матрицы равновесия узлов конструкции. Одной из первых работ, посвященных алгоритмизации метода сил, является статья [1], где для выбора «лишних» неизвестных усилий предлагается использовать метод исключения неизвестных Жордана-Гаусса. В дальнейшем, помимо использования метода Жордана-Гаусса, предлагалось использовать LU разложение [2] и сингулярное разложение [3]. Более эффективные вариации предложенных методов представлены, например, в работах [4, 5]. К алгебраическим можно отнести и метод, предложенный в работе [6]. Недостатком алгебраических методов является то, что помимо решения разрешающей системы уравнений, предварительно необходимо провести алгебраические операции с матрицей равновесия узлов конструкции. Попытки получить удобную (обладающую ленточной структурой, слабой заполненностью и проч.) матрицу разрешающих уравнений приводят к еще более сложным алгоритмам.

Топологические методы основаны на анализе геометрических свойств системы, таких как симметрия или цикличность. Так, в работах [7, 8] показано, как при помощи базиса циклов эквивалентного для стержневой конструкции графа выбрать основную систему метода сил. В дальнейшем были предложены алгоритмы [9, 10] выбора циклов для формирования матрицы разрешающих уравнений диагональной структуры. Разработаны методы, удобные для анализа конструкций, обладающих циклической структурой [11]. Недостатком топологических методов является их привязанность к конструкциям, обладающим определенной структурой. Использование предложенных методов для расчета конструкций произвольной геометрии неэффективно.

Отдельно можно отметить метод, получивший название интегрированного метода сил, предложенного в работе [12]. Интегрированный метод сил предполагает совместное решение уравнений равновесия и уравнений совместности деформаций. В настоящий момент интегрированный метод сил обобщён на плоские и пространственные задачи теории упругости, нелинейные задачи и задачи вероятностного анализа [13-15]. Однако полученная таким образом система уравнений существенно проигрывает по количеству неизвестных и структуре матрицы в сравнении с классическим методом сил и перемещений.

В свою очередь, метод сил может быть эффективен в задачах оптимального проектирования, проектирования адаптивных конструкций [16-18].

В настоящей работе предлагается алгоритм расчета плоских шарнирно-стержневых систем, основанный на методе сил.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ АЛГОРИТМИЗАЦИИ МЕТОДА СИЛ

Систему уравнений строительной механики шарнирно-стержневых систем можно записать в следующем виде:

$$A^T N = P, \tag{1}$$

$$AU = \varepsilon = \varepsilon^0 + \varepsilon^y, \tag{2}$$

$$\varepsilon^y = \Lambda N, \tag{3}$$

где N – столбец усилий в стержнях конструкции;

P – столбец заданных узловых нагрузок;

A^T – заданная матрица уравнений равновесия узлов конструкции;

$[\ldots]^T$ – операция транспонирования матрицы;

U – столбец узловых перемещений;

ε – столбец деформаций стержней (удлинений);

ε^0 – столбец заданных начальных деформаций стержней;

$\varepsilon^у$ – столбец упругих деформаций стержней;

Λ – диагональная матрица коэффициентов податливости стержней системы.

В системе (1) – (3) уравнение (1) представляет собой уравнения равновесия узлов системы, уравнение (2) – геометрические уравнения связывающие перемещения и деформации, а уравнение (3) – физические уравнения, связывающие усилия и деформации.

Решение системы (1) складывается из суммы общего решения однородных уравнений равновесия и какого-либо частного решения. В статически неопределимых стержневых конструкциях ранг матрицы A^T заведомо меньше числа её столбцов, соответственно, система соответствующих однородных уравнений равновесия нетривиально совместна. Построение общего решения и является основной трудностью в алгоритмизации метода сил.

Допустим, что построена фундаментальная система решений однородных уравнений равновесия. Возьмем столбцы фундаментальной системы в качестве строк некоторой матрицы B. Согласно определению фундаментальной системы справедливо:

$$A^T B^T = 0, \tag{4}$$

следовательно, для любого столбца F справедливо:

$$A^T B^T F = 0.$$

Таким образом, $B^T F$ является общим решением системы однородных уравнений равновесия. Общее решение системы (1) можно записать в следующем виде:

$$N = B^T F + N_ч, \tag{5}$$

где $N_ч$ – любое частное решение.

Транспонируя (4), получаем:

$$BA = 0, \tag{6}$$

Умножая теперь (2) на B, получаем:

$$BAU = B(\varepsilon^0 + \varepsilon^у), \tag{7}$$

с учетом (6) справедливо:

$$B(\varepsilon^0 + \varepsilon^у) = 0. \tag{8}$$

Подставив (3) с учетом (5) в (8), приходим к системе разрешающих уравнений:

$$B\Lambda B^T F + B\varepsilon^0 + B\Lambda N_ч = 0. \tag{9}$$

Матрицу $L = B\Lambda B^T$ можно назвать матрицей податливости системы.

Рассмотрим теперь подробнее выражение (8). По физическому смыслу уравнение (8) является уравнением совместности деформаций системы. Таким образом, построив матрицу совместности деформации системы, с алгебраической точки зрения, транспонированием B можно получить матрицу общего решения однородных уравнений равновесия.

В свою очередь, как это будет показано далее, матрицу совместности деформаций можно получить только из геометрических соображений, не прибегая к алгебраическим операциям над матрицей A^T.

Построив матрицу совместности деформаций системы B, дальнейшее решение сводится к вычислению столбца неизвестных F, пользуясь уравнением (9). Усилия в стержнях конструкции вычисляются при помощи (5).

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ СИСТЕМЫ

Ключевой идеей предлагаемого метода построения уравнений совместности деформаций является связь между деформациями стержней и площадью контура, построенного на данных стержнях. Для иллюстрации предлагаемого метода рассмотрим один раз статически неопределимую конструкцию, представленную на рис. 1а.

Так, представленная конструкция состоит из 6 стержней, пронумерованных цифрами 1-6, четырех узлов, обозначенных буквами i, k, m, s. Определим направление стержней, обозначенное стрелками. Направление стержней может быть произвольным, принятые направления не влияют на конечный результат.

Введем для каждого стержня, в соответствии с его направлением, два вектора – единичный вектор, направленный вдоль оси стержня $t=\left[t_x, t_y\right]^T$ и ортогональный к нему $n=\left[n_x, n_y\right]^T$, так, чтобы t, n, z составляли тройку векторов, аналогичную системе координат x, y, z.

Конструкция состоит из трех треугольных контуров, обозначенных обведенными цифрами, которые составляют четвертый треугольный контур (рис. 1б), построенный на узлах i, k, m.

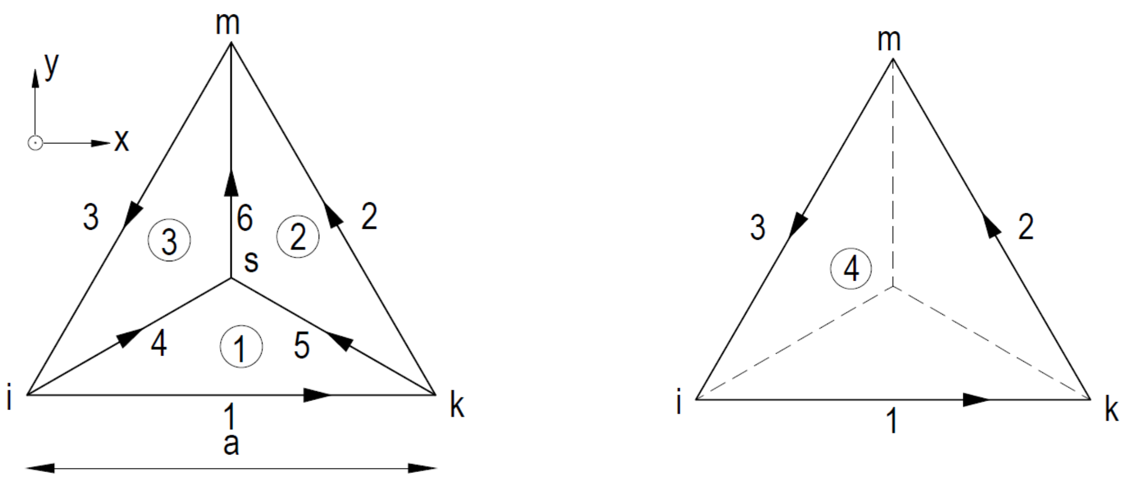

Рис. 1. Схема рассматриваемой фермы: a – контуры 1, 2, 3; b – контур 4
Fig. 1. Truss scheme: a – loops 1, 2, 3; b – loop 4

Для площадей указанных контуров 1 – 4 справедливо следующее соотношение:

$$S_4 = S_1 + S_2 + S_3,$$

где S_j - начальная площадь j-го контура.

После приложения внешних нагрузок, стержни конструкции получат некоторые деформации и площади контуров изменятся, однако, в силу неразрывности конструкции, для новых площадей так же будет справедливо аналогичное равенство:

$$S_4^{'} = S_1^{'} + S_2^{'} + S_3^{'},$$

где $S_j^{'}$ - площадь j-го контура после деформации.

Обозначая теперь как $\Delta S_j = S_j^{i} - S_j$ изменение площади j-го контура, получим соотношение

$$\Delta S_4 = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3. \tag{10}$$

Выражение (10) имеет физический смысл «неразрывности» площади конструкции. Записанное через деформации стержней конструкции выражение (10) и будет являться уравнением совместности деформаций.

Введем понятие смешанного произведение двух векторов, $a=\left[a_x, a_y\right]^T, b=\left[b_x, b_y\right]^T$, лежащих в плоскости x, y. Внешнее произведение может быть записано как [19]:

$$a \wedge b = det\left[a, b\right] = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix},$$

где $det\left[\ldots\right]$ - определитель матрицы.

Основные свойства внешнего произведения [19]:

$$a \wedge b = -b \wedge a,$$

$$a \wedge (\lambda b) = \lambda (a \wedge b) = (\lambda a) \wedge b, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c,$$

$$a \wedge b = 0 \leftrightarrow a \parallel b \qquad a, b \neq 0.$$

Внешнее произведение представляет собой ориентированную площадь параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах, т.е. равно площади параллелограмма со знаком плюс или минус в зависимости от того, совпадают или не совпадают тройки осей x, y, z и a, b, z по ориентации.

Деформация (удлинение) произвольного стержня, с единичным вектором t, направленным от узла i к узлу k, может быть записана в виде:

$$\varepsilon = t^T\left(U_k - U_i\right), \tag{11}$$

где U_j - вектор перемещений j-го узла, $U_j = \left[U_{jx}, U_{jy}\right]^T$.

Обозначим:

$$\omega = n^T\left(U_k - U_i\right), \tag{12}$$

ω представляет собой поворот стержня как жесткого целого.

Из уравнений (11) и (12) следует:

$$U_k - U_i = \varepsilon t + \omega n. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь изменение площади, например, контура 4. Пусть r_i, r_k, r_m радиус-векторы узлов контура i, k, m проведенные из произвольного полюса. Пользуясь внешним произведением изменение площади может быть записано как:

$$2\Delta S_4 = S_4 - S_4^{'} = \left\{(r_k - r_i)\wedge(r_m - r_i)\right\} - \left\{(r_k + U_k - r_i - U_i)\wedge(r_m + U_m - r_i - U_i)\right\}$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые, получаем:

$$\begin{aligned} 2\Delta S_4 &= U_i \wedge U_k + U_k \wedge U_m + U_m \wedge U_i + \\ &+ \left(U_m - U_k\right)\wedge r_i + \left(U_k - U_i\right)\wedge r_m + \left(U_i - U_m\right)\wedge r_k. \end{aligned} \tag{14}$$

Не обращая пока внимания на первую группу квадратичных по перемещениям слагаемых, рассмотрим вторую группу. В соответствии с (13) перепишем разность перемещений узлов для каждого из стержней контура:

$$\begin{aligned} U_k - U_i &= \varepsilon_1 t_1 + \omega_1 n_1, \\ U_m - U_k &= \varepsilon_2 t_2 + \omega_2 n_2, \\ U_i - U_m &= \varepsilon_3 t_3 + \omega_3 n_3. \end{aligned} \tag{15}$$

Подставив (15) в (14), можно заметить, что слагаемые второй группы представляют собой внешнее произведение деформаций стержня (и его жесткого поворота) и радиус-вектора к противоположному узлу.

Заметим, что при условии, что радиус-вектор будет ортогонален к стержню, составляющая, учитывающая жесткий поворот, будет равна нулю. Для любого треугольного контура такое возможно, если в качестве полюса для радиус-вектора принять ортоцентр треугольника.

Таким образом, выражение (14) с учетом (15) может быть представлено в виде:

$$2\Delta S_4 = U_i \wedge U_k + U_k \wedge U_m + U_m \wedge U_i + \varepsilon_1 t_1 \wedge r_m^{ikm} + \varepsilon_2 t_2 \wedge r_i^{ikm} + \varepsilon_3 t_3 \wedge r_k^{ikm}, \tag{16}$$

В выражении (16) верхний индекс ikm означает, что радиус-вектор проведен из ортоцентра треугольника ikm. Проделаем аналогичные операции для правой части выражения (10) и приведем результат:

$$\begin{aligned} 2\Delta S_1 &= U_s \wedge U_k + U_k \wedge U_i + U_i \wedge U_s + \\ &+ \left(\mathrm{U_k} - \mathrm{U_i}\right)\wedge r_s^{ski} + \left(\mathrm{U_s} - \mathrm{U_k}\right)\wedge r_i^{ski} + \left(\mathrm{U_i} - \mathrm{U_s}\right)\wedge r_k^{ski} = \\ &= U_s \wedge U_k + U_k \wedge U_i + U_i \wedge U_s + \varepsilon_1 t_1 \wedge r_s^{ski} + \varepsilon_5 t_5 \wedge r_i^{ski} - \varepsilon_4 t_4 \wedge r_k^{ski}, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} 2\Delta S_2 &= U_s \wedge U_m + U_m \wedge U_k + U_k \wedge U_s + \\ &+ \left(\mathrm{U_m} - \mathrm{U_k}\right)\wedge r_s^{smk} + \left(\mathrm{U_s} - \mathrm{U_m}\right)\wedge \mathrm{r}_k^{smk} + \left(\mathrm{U_k} - \mathrm{U_s}\right)\wedge \mathrm{r}_m^{smk} =, \\ &= U_s \wedge U_m + U_m \wedge U_k + U_k \wedge U_s + \varepsilon_2 t_2 \wedge r_s^{smk} - \varepsilon_6 t_6 \wedge \mathrm{r}_k^{smk} - \varepsilon_5 t_5 \wedge \mathrm{r}_m^{smk}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} 2\Delta S_3 &= U_s \wedge U_m + U_m \wedge U_i + U_i \wedge U_s + \\ &+ \left(\mathrm{U_i} - \mathrm{U_m}\right)\wedge \mathrm{r}_s^{smi} + \left(\mathrm{U_s} - \mathrm{U_i}\right)\wedge \mathrm{r}_m^{smi} + \left(\mathrm{U_m} - \mathrm{U_s}\right)\wedge \mathrm{r}_i^{smi} = \\ &= U_i \wedge U_k + U_k \wedge U_m + U_m \wedge U_i + \varepsilon_3 t_3 \wedge \mathrm{r}_s^{smi} + \varepsilon_4 t_4 \wedge \mathrm{r}_m^{smi} + \varepsilon_6 t_6 \wedge \mathrm{r}_i^{smi}. \end{aligned} \tag{19}$$

Подставляя теперь выражения (16) – (19) в (10) можно убедиться, что квадратичные по перемещениям слагаемые тождественно сокращаются. Оставшиеся слагаемые и представляют собой уравнение совместности деформации для рассматриваемой конструкции (20).

$$\begin{aligned}&\varepsilon_1 t_1 \wedge r_i^{ikm} + \varepsilon_2 t_2 \wedge r_m^{ikm} + \varepsilon_3 t_3 \wedge r_k^{ikm} = \\ &= \varepsilon_1 t_1 \wedge r_s^{ski} + \varepsilon_5 t_5 \wedge r_i^{ski} - \varepsilon_4 t_4 \wedge r_k^{ski} + \\ &+ \varepsilon_2 t_2 \wedge r_s^{smk} - \varepsilon_6 t_6 \wedge \mathrm{r}_k^{smk} - \varepsilon_5 t_5 \wedge \mathrm{r}_m^{smk} + \\ &+ \varepsilon_3 t_3 \wedge \mathrm{r}_s^{smi} + \varepsilon_4 t_4 \wedge \mathrm{r}_m^{smi} + \varepsilon_6 t_6 \wedge \mathrm{r}_i^{smi}.\end{aligned} \qquad (20)$$

Выражение (20) годится для любого четырехузлового контура с 6 стержнями, за исключением вырожденных случаев. Так, узел s может быть и вне треугольника ikm. В таком случае, одно из слагаемых выражения (10) будет получено со знаком минус.

Проделывая аналогичные операции, можно получить уравнение совместности деформации для любого произвольного контура.

Возьмем коэффициенты при деформациях стержней β_i в качестве элементов строки $B_j = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]$, где j - номер рассматриваемого контура.

Матрица совместности деформации конструкции, состоящей из нескольких контуров, теперь может быть определена как.

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}.$$

Транспонирование полученной матрицы и будет общим решением однородных уравнений равновесия конструкции. Формирование матрицы податливости конструкции теперь однозначно определяется нумерацией стержней и независимых статически неопределимых контуров и снимает проблему выбора основной системы метода сил.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, предложенный алгоритм метода сил исключает неопределенность в выборе основной системы и «лишних» неизвестных. Аналогично методу перемещений, структура матрицы податливости однозначно определяется нумерацией стержней и независимых статически неопределимых контуров фермы.

При этом, библиотека «конечных элементов» может быть заменена на библиотеку «статически неопределимых» контуров различной топологии. В инженерной практике обычно используются типовые, решетки ферм, следовательно, библиотека «независимых контуров» может быть составлена всего из нескольких наиболее распространенных вариантов.

В отличие от ранее предложенных методов построения алгоритма метода сил, предлагаемый метод не требует проведения каких-либо операций над матрицей уравнений равновесия узлов конструкции. Нет, строго говоря, никакой необходимости в хранении уравнений равновесия в памяти компьютера.

Указанные свойства уравнивают метод сил с методом перемещений с точки зрения вычислительной эффективности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Przemieniecki J. S., Denke P. H. Joining of complex substructures by the matrix force method // Journal of Aircraft. 1966. № 3(3). С. 236–243. DOI:10.2514/3.43731.

2. Thierauf G., Topgu A. Structural optimization using the force method // World Congress on Finite Element Methods in Structural Mechanics, Bournemouth, England, 1975.

3. Pellegrino S. Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix // International Journal of Solids and Structures. 1993. № 21(30). С. 3025–3035.

4. Topqu A. A contribution to the systematic analysis of finite element structures using the force method (in German), Doctoral disserr., Univ. of Essen. 1979.

5. Soyer E., Topçu A. Sparse self-stress matrices for the finite element force method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2001. № 9(50). С. 2175–2194.

6. Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов. Ленинград: Издательство ЛГУ,1976. 237 с.

7. Henderson J.C. Topological Aspects of Structural Linear Analysis // Aircraft Engineering and Aerospace Technology. 1960. № 5(32). С. 137–141.
8. Henderson J.C., Maunder E.A. A Problem in Applied Topology: on the Selection of Cycles for the Flexibility Analysis of Skeletal Structures // IMA Journal of Applied Mathematics. 1969. № 2(5). С. 254–269.
9. Kaveh A. Subminimal Cycle Bases for the Force Method of Structural Analysis // Communications in Applied Numerical Methods. 1987. № 4(3). С. 277-280.
10. Kaveh A. Suboptimal cycle bases of graphs for the flexibility analysis of skeletal structures // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1988. (71). С. 259–271.
11. Koohestani K. An orthogonal self-stress matrix for efficient analysis of cyclically symmetric space truss structures via force method // International Journal of Solids and Structures. 2011. № 2(48). С. 227–233.
12. Patnaik S.N. An integrated force method for discrete analysis // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1973. № 2(6). С. 237–251.
13. Patnaik S.N., Pai S.S., Hopkins D.A. Compatibility condition in theory of solid mechanics (elasticity, structures, and design optimization) // Arch. Comput. Methods Eng. Springer, 2007. № 4(14). С. 431–457.
14. Wang Y., Senatore G. Extended integrated force method for the analysis of prestress-stable statically and kinematically indeterminate structures // Int. J. Solids Struct. 2020. № 202. С. 798–815.
15. Wei X.F. Extension of Integrated Force Method into Stochastic Domain // Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech. Taylor & Francis Group, 2009. № 3(10). С. 197–208.
16. Kaveh A., Shabani Rad A. Metaheuristic-based optimal design of truss structures using algebraic force method // Structures. Elsevier, 2023. №50. С. 1951–1964.
17. Kaveh A., Zaerreza A. An Improved PSO Using the SRM of the ESSOA for Optimum Design of the Frame Structures via the Force Method // Stud. Syst. Decis. Control. Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, 2023. №463. С. 193–217.
18. Yuan X., Liang X., Li A. Shape and force control of prestressed cable-strut structures based on nonlinear force method // Adv. Struct. Eng. 2016. № 12(19). С. 1917–1926.
19. Постников М.М. Аналитическая геометрия. Москва: Наука, 1979. 336 с.

ОБ АВТОРАХ

Тимур Равилевич Ибрагимов – студент магистратуры. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ). 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29. E-mail: ibragimov@icestructural.ru

Владимир Владимирович Лалин – д.т.н., профессор Высшей школы промышленно-гражданского и дорожного строительства. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ). 195251, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29. E-mail: lalin_vv@spbstu.ru

ABOUT THE AUTHORS

Timur R. Ibragimov – graduate student. Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (SPbPU). 195251, Russia, St.Petersburg, Polytechnicheskaya st., 29. E-mail: ibragimov@icestructural.ru

Vladimir V. Lalin – Doctor of Technical Sciences, Professor of the Higher School of Industrial, Civil and Road Construction. Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (SPbPU). 195251, Russia, St.Petersburg, Polytechnicheskaya st., 29. E-mail: lalin_vv@spbstu.ru